Н. Билибинъ.

КУРСЪ
ТРИГОНОМЕТРІИ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Основанія теоріи тригонометрическихъ (круговыхъ) функцій.

Цѣна 1 р. 25 к.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
1910.

СОЧИНЕНІЯ ТОГО ЖЕ АВТОРА:

(допущенныя Учен. Ком. М-ва Нар. Просв., какъ руководства)

1. **Теоретическая ариѳметика.** Изданіе седьмое. 1908 г. Цѣна 1 р. 25 к.

2. **Учебникъ алгебры.** Изданіе четвертое. 1905 г. Ц. 2 р.

3. **Основанія анализа безконечно малыхъ.** 1907 г. Ц. 2 р.

4. **Курсъ тригонометріи.** Часть первая. Прямолинейная тригонометрія. (Рѣшеніе треугольниковъ). 1909 г. Ц. 75 к.



3000

Оглавленіе второй части.

ГЛАВА I.

О функціяхъ вообще.

ГЛАВА II.

Основныя свойства тригонометрическихъ функцій.

ГЛАВА III.

Теорема сложенія.

ГЛАВА IV.

Умноженіе и дѣленіе аргумента.

ГЛАВА V.

Тригонометрическія уравненія.

ГЛАВА VI.

Тригонометрическіе элементы дугъ и угловъ.

ГЛАВА VII.

Обратныя круговыя функціи.

ГЛАВА VIII.

Приближенныя значенія тригонометрическихъ элементовъ. Построеніе таблицъ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Вторая часть «Курса Тригонометріи» представляетъ изложеніе «Основаній теоріи тригонометрическихъ функцій». При этомъ изложеніи выясняются, на тригонометрическихъ функціяхъ, основныя понятія, относящіяся къ теоріи функцій, а именно понятія: о функціи и ея непрерывности, о графическомъ изображеніи функцій, о нуляхъ и полюсахъ функцій, о возрастаніи и убываніи функцій, о производной, о maximum'ахъ и minimum'ахъ и объ обратимости функцій. Въ дополнительномъ классѣ реальныхъ училищъ введенъ курсъ «Основаній анализа безконечно малыхъ», въ которомъ вышеозначенныя понятія должны быть съ ясностью усвоены, а потому, казалось бы, представляется цѣлесообразнымъ останавливаться на этихъ понятіяхъ, попутно, при прохожденіи той части курса тригонометріи, которая относится къ «теоріи тригонометрическихъ функцій». Казалось бы, что и при прохожденіи курса тригонометріи въ гимназіяхъ полезно, въ общеобразовательномъ отношеніи, остановиться на выясненіи вышеозначенныхъ понятій; позволяю думать, что выясненіе этихъ понятій возбудитъ въ ученикахъ интересъ, бо́льшій того, какой возбуждаютъ въ нихъ различныя сложныя преобразованія, для большинства пропадающія совершенно безслѣдно.

Глава I, подъ заглавіемъ: «О функціяхъ вообще», посвящена выясненію понятій о функціи, ея графическомъ изображеніи и ея непрерывности; примѣры взяты изъ алгебры.

Изложеніе «Основаній теоріи тригонометрическихъ функцій» ведется двумя способами.

Первый способъ не зависитъ отъ обобщеннаго понятія о дугѣ, какъ векторѣ, и объ углѣ, какъ векторѣ. Онъ заключается въ слѣдующемъ:

Символы $\sin x$ и $\cos x$ опредѣляются для значеній x, лежащихъ въ области $(-\pi, +\pi)$, какъ тригонометрическіе элементы тригонометрическихъ угловъ, лежащихъ въ этой области; кромѣ сего, символамъ этимъ присвоивается свойство періодичности. На основаніи этого свойства выводятся два равенства:

$$\sin x = (-1)^l \sin(x - l\pi), \qquad \cos x = (-1)^l \cos(x - l\pi),$$

гдѣ l есть цѣлое число, ближайшее къ числу $\frac{x}{\pi}$ и небольшее его, и гдѣ, слѣдовательно, $(x - l\pi)$ заключено, при всякомъ x, въ области $(-\pi, +\pi)$. Равенства эти показываютъ, что каждый изъ символовъ: $\sin x$ и $\cos x$ имѣетъ, для всякаго даннаго значенія x, совершенно опредѣленное значеніе и, слѣдовательно, представляетъ функцію аргумента x для всякой области аргумента. Все остальное строится на этихъ равенствахъ, какъ слѣдствіе, и этому построенію посвящены Главы II, III, IV и V, содержаніе коихъ указывается «Оглавленіемъ».

Второй способъ изложенія, которому посвящена Глава VI, основанъ на обобщенномъ понятіи о дугѣ и на понятіяхъ объ ея тригонометрическихъ элементахъ.

Глава VII посвящена «обратимости» тригонометрическихъ функцій, сложенію обратныхъ круговыхъ функцій и нахожденію ихъ производныхъ.

И наконецъ, Глава VIII излагаетъ возможность построенія таблицъ.

Обязуюсь замѣтить, что хотя бо́льшая часть книги составлена самостоятельно, но, при ея составленіи, считалъ необходимымъ имѣть въ виду современные учебники тригонометріи: Bourlet, Borel, Grevy и другихъ.

10 декабря 1909 г.

Н. Билибинъ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ОСНОВАНІЯ ТЕОРІИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ (КРУГОВЫХЪ) ФУНКЦІЙ.

ГЛАВА I.

О функціяхъ вообще.

§ 1. Понятіе о функціи.

172. Числа постоянныя и перемѣнныя.—Во многихъ математическихъ вопросахъ, сообразно условіямъ вопроса, символы: $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$, служащіе для изображенія чиселъ, раздѣляются на числа **постоянныя** и числа **перемѣнныя**. Символъ называется **постояннымъ числомъ**, или, просто, **постояннымъ**, если онъ означаетъ **одно** опредѣленное число; символъ называется **перемѣннымъ числомъ**, или, просто, **перемѣннымъ**, если онъ означаетъ **всякое** изъ нѣсколькихъ чиселъ (даже изъ двухъ) и, слѣдовательно, можетъ подлежать **измѣненіямъ**. Каждое изъ нихъ называется **значеніемъ** перемѣннаго.

Во всемъ послѣдующемъ будемъ разсматривать только **вещественныя** значенія перемѣннаго.

173. Аргументъ.—**Аргументомъ** или **независимымъ перемѣннымъ** называется перемѣнное число, получающее послѣдовательно рядъ возрастающихъ или рядъ убывающихъ значеній. Совокупность этихъ значеній называется **областью** аргумента. Такова область натуральныхъ чиселъ: 1, 2, 3, 4, ..., изъ которой можно выдѣлить область простыхъ чиселъ: 1, 2, 3, 5, 7, ..., область квадратовъ: 1, 4, 9, 16, ..., и т. д.

Во многихъ вопросахъ аргументъ долженъ обладать такъ наз. **свойствомъ непрерывности**. Аргументъ называется **непрерывнымъ** въ области (a, b), если область состоитъ изъ всѣхъ чиселъ, какъ **раціональныхъ**, такъ и **ирраціональныхъ**, содержащихся между числами a и b. Числа a и b называются **границами** области, причемъ границы эти могутъ входить въ область аргумента, но могутъ и не входить.

Итакъ, когда говорятъ, что аргументъ x *измѣняется* **непрерывно** отъ a до b, то предполагаютъ, что x принимаетъ всѣ значенія отъ a до b, возрастая, если $a < b$, и убывая, если $a > b$.

174. Функція аргумента. — *Перемѣнное число y называется* **функціею** *аргумента x въ области (a, b), если* **каждому** *значенію аргумента въ этой области соотвѣтствуетъ* **одно** *и* **только одно опредѣленное** *значеніе перемѣннаго y.*

Для обозначенія, что перемѣнное y есть функція аргумента x, употребляютъ знакоположенія: $y=f(x)$, $y=F(x)$, $y=\Phi(x)$, $y=\varphi(x)$, и т. п., причемъ знаки: f, F, Φ, φ, . . . называются *функціональными* знаками. Символомъ $f(c)$ означаютъ значеніе функціи $f(x)$, соотвѣтствующее значенію c аргумента x.

175. Примѣры функцій прерывнаго аргумента. — **1°.** Если, ограничивая область аргумента x натуральными числами, примемъ, что, для каждаго *натуральнаго* значенія x,

$$y=1.2.3\ \dots\ x,$$

то y представитъ функцію натуральнаго числа x.

2°. Если, ограничивая область аргумента x раціональными числами, примемъ, что для каждаго значенія аргумента x, представляемаго *несократимою* дробью $\frac{m}{n}$,

$$y=\frac{1}{n},$$

то y представитъ функцію *раціональнаго* числа x, и ея область состоитъ изъ дробей, числители коихъ равны 1.

176. Примѣры функцій непрерывнаго аргумента. — **1°.** Перемѣнное y будетъ функціею x, если примемъ, что $y=1$ для раціональныхъ значеній x, и $y=0$ для ирраціональныхъ значеній x. Область функціи состоитъ изъ двухъ чиселъ: 0 и 1.

2°. Число простыхъ чиселъ, не превосходящихъ положительнаго числа x, представляетъ функцію, которая имѣетъ только цѣлыя положительныя значенія. Обозначивъ ее символомъ $[x]$, получимъ, напр.,

$$[23]=10, \qquad \left[\frac{65}{7}\right]=5, \qquad \left[\sqrt{6295787}\right]=3.$$

3°. Цѣлая часть положительнаго числа x представляетъ функцію аргумента x. Обозначивъ ее символомъ Ex, получимъ, напр.,

$$E5 = 5, \quad E\frac{2}{7} = 0, \quad E\frac{109}{3} = 33,$$
$$E\sqrt{62735,5} = 3, \quad E\log_{10}23,6 = 1.$$

4°. Многочленъ

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n,$$

составленный изъ одночленовъ вида A_kx^k, гдѣ k есть число натуральное, а коэффиціентъ A_k число постоянное, есть функція аргумента x, ибо каждому значенію аргумента соотвѣтствуетъ *одно* опредѣленное значеніе многочлена.

Многочленъ этотъ называется *цѣлою раціональною*, или, просто, **цѣлою** функціею аргумента x.

5°. Отношеніе

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

двухъ цѣлыхъ функцій:

$$f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n,$$
$$\varphi(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_mx^m$$

есть функція аргумента x, ибо каждому значенію аргумента, *за исключеніемъ только тѣхъ его значеній, которыя обращаютъ знаменателя* $\varphi(x)$ *въ нуль,* соотвѣтствуетъ *одно* опредѣленное значеніе разсматриваемаго отношенія.

Отношеніе это называется **дробною** *раціональною функціею*.

6°. Перемѣнное y, опредѣленное такимъ образомъ: оно равно $7-x$ для области $x \leqq 1$ и равно $5+x$ для области $x \geqq 1$, представляетъ функцію x для всякаго значенія x, ибо каждому значенію x отвѣчаетъ *одно* опредѣленное значеніе y.

7°. Разсмотримъ выраженіе:

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Изъ опредѣленія этого выраженія, даннаго въ алгебрѣ, слѣдуетъ, что оно, для всякаго значенія x, при которомъ подкоренное количество положительное, имѣетъ *два* вещественныхъ значенія (исключеніе составляютъ тѣ значенія x, при которыхъ подкоренное количество можетъ быть равно нулю). Для того, чтобы это выра-

женіе представляло функцію y, необходимо установить основаніе, по которому выбиралось бы *одно* значеніе изъ указанныхъ *двухъ*.

За такое основаніе принимаютъ одно изъ условій: $y \geqslant 0$, $y \leqslant 0$.

8°. Положимъ, что перемѣнныя y и x связаны уравненіемъ:

$$y^2 - 2xy + 1 = 0, \tag{1}$$

и разсмотримъ x, какъ аргументъ.

Перемѣнное y имѣетъ вещественныя значенія только при значеніяхъ x, удовлетворяющихъ условію:

$$x^2 - 1 \geqslant 0, \quad \text{или} \quad (x-1)(x+1) \geqslant 0,$$

т.-е. для *двухъ* областей.

$$x \leqslant -1, \qquad x \geqslant 1 \tag{2}$$

непрерывнаго аргумента.

Для каждаго изъ значеній x, лежащихъ въ этихъ областяхъ, перемѣнное y имѣетъ *два* значенія (исключеніе составляютъ значенія: $x = -1$ и $x = +1$, при коихъ перемѣнное y принимаетъ по одному значенію, и именно $y = -1$, при $x = -1$, и $y = +1$, при $x = +1$).

Для того, чтобы перемѣнное y представляло функцію, необходимо принять основаніе, по которому выбиралось бы *одно* изъ этихъ значеній, то или другое.

Рѣшая уравненіе (1) относительно y, получимъ *два* корня.

$$y = x - \sqrt{x^2 - 1}, \qquad y = x + \sqrt{x^2 - 1}. \tag{3}$$

Каждый изъ нихъ представляетъ функцію аргумента x въ областяхъ (1), ибо каждому значенію аргумента x соотвѣтствуетъ *одно* значеніе одного корня и *одно* значеніе другого корня.

Принято разсматривать уравненіе (1), какъ уравненіе, опредѣляющее *двѣ* функціи (3).

Замѣтимъ, что значенія первой функціи удовлетворяютъ неравенству: $y \leqslant x$ и значенія второй неравенству: $y \geqslant x$.

9°. Разсмотримъ уравненіе:

$$x^4 + y^4 - 4xy + 2 = 0.$$

Оно не опредѣляетъ функціи. И въ самомъ дѣлѣ, переписавъ это уравненіе такъ:

$$(x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 1)^2 = 0,$$

увидимъ, что ему удовлетворяютъ только двѣ системы вещественныхъ x и y.

$$1)\ x - y = +1, \qquad 2)\ x - y = -1.$$

10°. Положимъ, что перемѣнныя y и x связаны равенствомъ:

$$y = a^x,$$

гдѣ a есть постоянное положительное число, отличное отъ **1**. Если x разсматривается, какъ аргументъ, то перемѣнное y представляетъ функцію x для всякой области при условіи: $a^x > 0$, ибо, при этомъ условіи, всякому данному значенію аргумента отвѣчаетъ, какъ извѣстно изъ алгебры, *одно* опредѣленное значеніе y [1])

Функція эта носитъ названіе **показательной**, причемъ постоянное число a называется *основаніемъ* функціи. Изъ всевозможныхъ показательныхъ функцій особаго вниманія заслуживаетъ та, въ которой основаніе есть число, обозначаемое буквою e и представляющее *предѣлъ, къ которому стремится выраженіе* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *при безпредѣльномъ возрастаніи n по какому ни есть закону* [2]).

177. Сложная функція. Если z есть функція аргумента y для нѣкоторой области:

$$a \leqslant y \leqslant b \qquad (1)$$

этого аргумента, причемъ y есть, въ свою очередь, функція аргумента x для нѣкоторой области:

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta, \qquad (2)$$

то z есть функція аргумента x для тѣхъ значеній изъ области (2), которымъ соотвѣтствуютъ значенія y, лежащія въ области (1), ибо каждому подобному значенію x будетъ соотвѣтствовать *одно* опредѣленное значеніе z. Перемѣнное z, по отношенію къ x, называется **сложною функціею** аргумента x.

Положимъ, напримѣръ, что

$$z = +\sqrt{y}, \text{ причемъ } y = x - 1.$$

Перемѣнное z есть функція аргумента y въ области:

$$y \geqslant 0, \qquad (1)$$

причемъ перемѣнное y есть функція аргумента x въ каждой изъ областей: $x < 1$, $x \geqslant 1$. Но значенія y, соотвѣтствующія области

---

[1]) См. *И. Билибинъ*. Алгебра. 4-е изд. Стр. 340 и слѣд.

[2]) Тоже. Стр. 487.

$x < 1$, не лежатъ въ области (1); между тѣмъ какъ значенія y, соотвѣтствующія области: $x \geqslant 1$, образуютъ область (1). Слѣдовательно, перемѣнное x есть функція аргумента y въ области: $y \geqslant 1$.

178. Алгебраическія и трансцендентныя функціи. Если перемѣнное y есть такая функція аргумента x въ области:

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

что всякое значеніе аргумента x этой области и соотвѣтствующее значеніе функціи удовлетворяютъ одному и тому же уравненію:

$$P_0 y^n + P_1 y^{n-1} + \dots + P_k y^{n-k} + \dots + P_{n-1} y + P_n = 0,$$

гдѣ каждый изъ коэффиціентовъ P_k есть *цѣлая* функція (176,4°) аргумента x, то функція y называется **алгебраическою** функціею аргумента x. Въ противоположномъ случаѣ функція называется **трансцендентною**.

Всякая *раціональная* функція (176,5°) есть функція алгебраическая, ибо она удовлетворяетъ уравненію:

$$P_0 y + P_1 = 0.$$

Замѣтимъ, что всякая функція y выраженная въ аргументѣ при помощи знаковъ: сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень съ раціональнымъ показателемъ и извлеченія корней, есть, согласно опредѣленію, алгебраическая функція аргумента. Пояснимъ примѣромъ.

Выраженіе:

$$y = \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-1}}, \text{ гдѣ } x > 1,$$

есть функція x. Она, очевидно, удовлетворяетъ уравненію:

$$y\sqrt{x-1} = 2 + \sqrt[3]{x},$$

которое, по уничтоженіи знаковъ корней, приводится къ такому:

$$(x-1)^3 y^6 - 12(x-1)^2 y^4 + (-12x^2 + 60x - 48) y^2 - (x+8)^2 = 0.$$

Одно изъ выраженій y, удовлетворяющихъ этому уравненію, и представитъ вторую функцію.

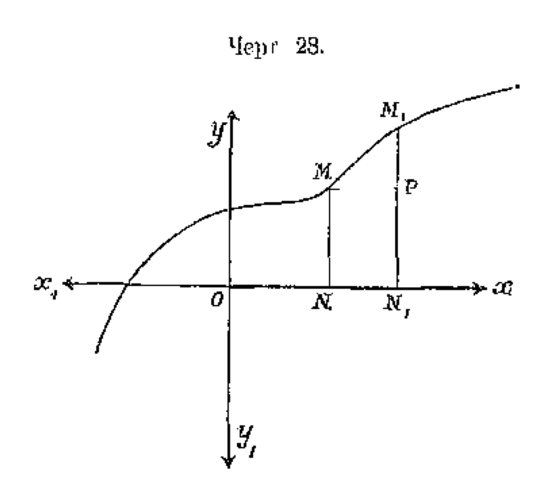
Замѣтимъ однако, что не всякая алгебраическая функція способна выражаться въ аргументѣ x при помощи указанныхъ знаковъ дѣйствій, ибо не всякое алгебраическое уравненіе имѣетъ корни, способные такимъ образомъ выражаться черезъ коэффиціенты этого уравненія.

§ II. Графическое изображеніе функцій.

179. Построеніе кривой, изображающей ходъ измѣненій функціи при возрастаніи аргумента. Примемъ какія-нибудь двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя xx_1 и yy_1 за прямоугольныя оси координатъ на плоскости.

Возьмемъ какую нибудь функцію $y = f(x)$ и будемъ разсматривать значенія непрерывнаго аргумента, какъ абсциссы точекъ, а соотвѣтствующія значенія функціи, какъ соотвѣтственныя ординаты этихъ точекъ, и вообразимъ, что построены всѣ точки для нѣкоторой области аргумента. Точки эти образуютъ *геометрическое мѣсто* (кривую) (черт. 28), которое можетъ разсматриваться, какъ *графическое изображеніе функціи* въ указанной области аргумента.

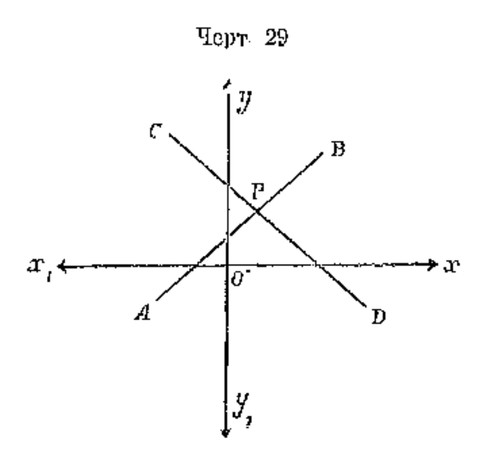
Черт. 28.



Фигура этой кривой наглядно представитъ тѣ измѣненія, которыя будетъ претерпѣвать перемѣнная ордината при возрастаніи перемѣнной абсциссы, т.-е. наглядно представитъ ходъ измѣненій функціи при возрастаніи аргумента въ разсматриваемой области.

180. Примѣры. — 1°. Функція $f(x) = ax + b$ графически изображается прямою, составляющею съ осью x-овъ уголъ, тангенсъ котораго равенъ a, и пересѣкающею ось y-овъ въ точкѣ, ордината которой равна b.

Черт. 29



2°. Разсмотримъ двѣ функціи $f(x) = ax + b$ и $\varphi(x) = cx + d$. Каждая изъ нихъ графически изобразится прямою; положимъ, что прямыя эти соотвѣтственно суть: AB и CD (черт. 29). Если эти прямыя непараллельны, то точка ихъ пересѣченія P имѣетъ абсциссою $x = \frac{d-b}{a-c}$. Положимъ, что разсматривается такая функція, которая, для всѣхъ значеній аргумента: $x < \frac{d-b}{a-c}$, совпадаетъ съ функціею $f(x)$, а для всѣхъ значеній аргумента: $x > \frac{d-b}{a-c}$ совпадаетъ съ функціею $\varphi(x)$; ясно, что графическимъ изображеніемъ таковой функціи будетъ ломаная линія APD.

§ III. Непрерывность функцій.

181. Непрерывность функціи для даннаго значенія аргумента. — Понятіе о непрерывности функціи, которое сейчасъ будетъ дано, принадлежитъ къ важнѣйшимъ понятіямъ. Оно должно быть совершенно точно и ясно усвоено.

Разсмотримъ функцію $f(x)$ непрерывнаго аргумента x, опредѣленную для области:

$$a \leqslant x \leqslant b. \tag{1}$$

Возьмемъ число c въ этой области и положимъ, что числа $c - h$ и $c + h$, гдѣ h есть нѣкоторое положительное число, не выходятъ за границы области (1).

Составимъ изъ значеній функціи $f(x)$ двѣ *послѣдовательности* *):

$$f(c-h),\ f(c-h_1),\ f(c-h_2),\ \ldots,\ f(c-h_n),\ \ldots, \tag{2}$$
$$f(c+h),\ f(c+h_1),\ f(c+h_2),\ \ldots,\ f(c+h_n),\ \ldots, \tag{3}$$

причемъ, положимъ, что послѣдовательность:

$$h,\ h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n,\ \ldots$$

*) *Послѣдовательностью* наз. безграничный рядъ чиселъ, слѣдующихъ другъ за другомъ по опредѣленному закону. Напр., ариѳметическая и геометрическая прогрессіи суть послѣдовательности.

См. *Н. Билибинъ* „Алгебра". Изд. 4. Стр. 452.

„ „ „Основанія анализа безконечно малыхъ". Стр. 1

есть послѣдовательность положительныхъ чиселъ, безгранично убывающихъ по какому ни есть закону, такъ что

$$c = \lim(c - h_n)_{n=\infty} = \lim(c + h_n)_{n=\infty}.$$

Положимъ, что послѣдовательности (2) и (3) имѣютъ опредѣленные предѣлы, независимые отъ того закона, по которому h_n безгранично убываетъ.

Обозначимъ эти предѣлы соотвѣтственно символами:

$$f(c-0) \quad \text{и} \quad f(c+0). \tag{4}$$

Функція $f(x)$ называется **непрерывною при $x=c$, или въ мѣстѣ c,** *если имѣютъ мѣсто равенства:*

$$f(c) = f(c-0) = f(c+0). \tag{5}$$

Равенства эти равносильны слѣдующимъ:

$$\lim[f(c\pm h) - f(c)]_{h=0} = 0, \quad \text{или} \quad \lim[f(x)]_{x=c} = f(c). \tag{6}$$

182. Непрерывность функціи на границахъ области аргумента.—Должно сдѣлать замѣчаніе о тѣхъ значеніяхъ аргумента x, которыя совпадаютъ съ границами его области. Если $c=a$, то о символѣ $f(a-0)$ не можетъ быть рѣчи, и можно говорить о символѣ $f(a+0)$. Если же $c=b$, то, наоборотъ, не можетъ быть рѣчи о символѣ $f(b+0)$, и можно говорить только о символѣ $f(b-0)$.

Говорятъ, что функція *непрерывна* на *границахъ* области аргумента, если имѣютъ мѣсто равенства:

$$f(a+0) = f(a) \quad \text{и} \quad f(b-0) = f(b).$$

Непрерывность на границахъ можетъ быть названа *односторонней.*

183. Непрерывность функціи въ области аргумента.— Функція $f(x)$ называется *непрерывною внутри области аргумента,* если она непрерывна для каждаго значенія аргумента, лежащаго *внутри* этой области. Если же она непрерывна и на границахъ области, то она называется непрерывною во *всей* области аргумента.

184. Иное формулированіе понятія о непрерывности. Если непрерывный аргументъ, имѣя значеніе c, получаетъ значеніе $c+h$, гдѣ h положительное или отрицательное число, то говорятъ, что онъ испытываетъ *приращеніе h.* Положительная или

отрицательная разность $f(c+h)-f(c)$ называется *соотвѣтствующимъ приращеніемъ функціи.*

При помощи этихъ терминовъ и на основаніи равенствъ (5) опредѣленіе понятія о непрерывности функціи внутри области аргумента можно формулировать такимъ образомъ:

Функція $f(x)$ непрерывна внутри области аргумента, если при всякомъ значеніи аргумента, взятомъ внутри этой области, безконечно малому приращенію аргумента соотвѣтствуетъ безконечно малое приращеніе функціи.

Замѣчаніе.—Если данная функція есть функція непрерывная, то каждой точкѣ M кривой (черт. 28), изображающей функцію, соотвѣтствуетъ такая точка M_1, для которой хорда MM_1 представляетъ сколь-угодно малый отрѣзокъ. И въ самомъ дѣлѣ, проводя хорду MM_1, получимъ:

$$MM_1 < MP + PM_1,$$

или

$$MM_1 < (ON_1 - ON) + (M_1N_1 - MN).$$

Но, для непрерывной функціи, разности: (ON_1-ON) и (M_1N_1-MN), представляющія приращеніе аргумента и соотвѣтственное приращеніе функціи, могутъ быть сколь-угодно малы; слѣдовательно, отрѣзокъ MM_1 можетъ быть сколь-угодно малъ.

185. Разрывъ непрерывности. — Если для нѣкотораго значенія аргумента, равнаго c, равенство:

$$lim[f(x)]_{x=c} = f(c)$$

не удовлетворено, то говорятъ, что $f(x)$ имѣетъ разрывъ непрерывности при $x=c$.

186. Примѣры непрерывныхъ функцій. — 1°. *Функція ax^n, гдѣ* n *есть натуральное число, есть функція непрерывная для всякаго значенія c аргумента.* И въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ разность:

$$(c+h)^n - c^n.$$

Она можетъ быть разложена [1]) на двухъ сомножителей, изъ коихъ одинъ есть разность:

$$c+h-c=h,$$

а другой

$$(c+h)^{n-1}+(c+h)^{n-2}c+\ldots,$$

[1]) *Н. Билибинъ* „Алгебра". Изд. 4. Стр. 86, 332.

который означимъ буквою P. Итакъ,

$$(c+h)^n - c^n = h.P.$$

Отсюда

$$|(c+h)^n - c^n| = |h|.\ P\ .$$

Такъ какъ, при безконечномъ убываніи h, сомножитель P не возрастаетъ безгранично, то онъ остается менѣе нѣкотораго числа A, и, слѣдовательно,

$$|(c+h)^n - c^n| < |h|\ .\ A.$$

Если $|h|$ стремится къ нулю, т.-е. если онъ становится и продолжаетъ быть менѣе $\frac{\alpha}{A}$, гдѣ α есть сколь угодно малое заданное число, то

$$|(c+h)^n - c^n| < \alpha,$$

или

$$\lim\Big\{(c+h)^n - c^n\Big\}_{h=0} = 0.$$

Равенство это, на основаніи понятія о непрерывности, говоритъ, что функція x^n, гдѣ n натуральное число, есть функція непрерывная при $x = c$.

2°. *Функція a^x, гдѣ a положительное число, есть функція непрерывная для всякаго значенія аргумента.* И въ самомъ дѣлѣ,

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1); \quad |a^{x+h} - a^x| = a^x.|a^h - 1|;$$

но $|a^h - 1|$, при стремленіи h къ нулю, становится и продолжаетъ быть менѣе всякаго заданнаго числа, напр. числа $\frac{\alpha}{a^x}$, гдѣ α произвольно малое число [1]). Слѣдовательно,

$$|a^{x+h} - a^x| < a^x.\frac{\alpha}{a^x} \text{ или } < \alpha, \text{ т. е. } \lim(a^{x+h} - a^x)_{h=0} = 0,$$

что и требовалось доказать.

3°. *Алгебраическая сумма непрерывныхъ функцій есть функція непрерывная.* И въ самомъ дѣлѣ, если

$$F(x) = f(x) \pm \varphi(x),$$

---

[1]) *Н. Билибинъ.* „Алгебра". Изд. 4. Стр. 342.

гдѣ $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть непрерывныя функціи, то [1])

$$\lim[F(x)]_{x=c} = \lim[f(x)]_{x=c} \pm \lim[\varphi(x)]_{x=c} = f(c) \pm \varphi(c).$$

4°. *Произведеніе непрерывныхъ функцій есть функція непрерывная.* И въ самомъ дѣлѣ, если

$$F(x) = f(x) \cdot \varphi(x),$$

то

$$\lim[F(x)]_{x=c} = \lim[f(x)]_{x=c} \cdot \lim[\varphi(x)]_{x=c} = f(c) \cdot \varphi(c) = F(c).$$

5°. *Степень непрерывной функціи есть функція непрерывная.* И въ самомъ дѣлѣ, если

$$F(x) = [(fx)]^m,$$

то

$$\lim[F(x)]_{x=c} = \lim[f(x)_{x=c}]^m = [f(c)]^m = F(c).$$

6°. *Цѣлая функція*

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

есть функція непрерывная для всякаго значенія x, ибо она равна суммѣ конечнаго числа функцій, непрерывныхъ при всякомъ значеніи аргумента.

7°. *Частное двухъ непрерывныхъ функцій есть непрерывная функція для каждаго изъ значеній x, не обращающихъ знаменателя* **въ нуль.** И въ самомъ дѣлѣ, если

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

то

$$\lim[F(x)]_{x=c} = \frac{\lim[f(x)]_{x=c}}{\lim[\varphi(x)]_{x=c}} = \frac{f(c)}{\varphi(c)} = F(c).$$

Если c есть корень знаменателя и, вмѣстѣ съ тѣмъ, есть корень числителя, т.-е. если

$$\varphi(c) = 0 \qquad \text{и} \qquad f(c) = 0,$$

то частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ можно иногда разсматривать, какъ непрерывную функцію и при $x = c$. Возьмемъ примѣръ.

[1]) *Н. Бычковъ.* „Алгебра". Изд. 4. Стр. 454 и слѣд.

Положимъ, что

$$F(x)=\frac{x^3-1}{x^3-x^2-x+1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

При $x=1$ числитель и знаменатель разсматриваемой функціи обращаются въ нули, и функція теряетъ опредѣленный смыслъ. Для всѣхъ остальныхъ значеній x она имѣетъ опредѣленный смыслъ и равна функціи:

$$F_1(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1},$$

представляющей непрерывную функцію для всякаго значенія аргумента, ибо ея знаменатель ни при какомъ вещественномъ значеніи аргумента не обращается въ нуль. Если, слѣдовательно, *условимся* считать, что $F(x)=F_1(x)$ при всякомъ значеніи аргумента, а слѣдовательно $F(1)=F_1(1)=\frac{3}{2}$, то можемъ разсматривать $F(x)$, какъ непрерывную функцію для всѣхъ значеній аргумента.

8°. Разсмотримъ сложную функцію $z=f(y)$, гдѣ $y=f(x)$. Если y есть непрерывная функція перемѣннаго x, а z есть непрерывная функція перемѣннаго y, то z есть, вмѣстѣ съ тѣмъ, непрерывная функція x, ибо безконечно малому приращенію x соотвѣтствуетъ безконечно малое приращеніе y, а сему послѣднему — безконечно малое приращеніе z; слѣдовательно, безконечно малому приращенію x соотвѣтствуетъ безконечно малое приращеніе z, что и нужно было показать.

187. Примѣры разрывовъ. — 1°. Разсмотримъ выраженіе:

$$y=\frac{2^{\frac{1}{x-1}}-1}{2^{\frac{1}{x-1}}+3}.$$

Оно представляетъ функцію при $x\gtrless 1$ и теряетъ смыслъ при $x=1$. Назвавъ ее черезъ $f(x)$, можемъ показать однако, что предѣлы $f(1-0)$ и $f(1+0)$ существуютъ, причемъ они различны между собою. И въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$f(1-h)=\frac{2^{-\frac{1}{h}}-1}{2^{-\frac{1}{h}}+3},\quad f(1+h)=\frac{2^{+\frac{1}{h}}-1}{2^{+\frac{1}{h}}+3}=\frac{1-2^{-\frac{1}{h}}}{1+3.2^{-\frac{1}{h}}},$$

гдѣ h положительное число. Принимая во вниманіе, что, при без-

граничномъ убываніи h, число $2^{-\frac{1}{h}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{h}}}$ безгранично убываетъ, получимъ:

$$f(1-0) = \lim[f(1-h)]_{h=0} = -\frac{1}{3}, \quad f(1+0) = \lim f(1+h)_{h=0} = 1,$$

т.-е.

$$f(1-0) \text{ не } = f(1+0).$$

Отсюда слѣдуетъ, что, какое бы добавочное опредѣленіе разсматриваемой функціи при $x=1$ не сдѣлали, *значеніе $x=1$ представитъ мѣсто разрыва функціи $f(x)$, если это значеніе лежитъ внутри области аргумента.*

Сдѣлаемъ, однако, слѣдующія замѣчанія.

1. Если ограничимъ область аргумента условіемъ $x \leqslant 1$ и положимъ, что $f(1) = -\frac{1}{3}$, то можемъ сказать, что функція непрерывна во всей области аргумента, ибо на границѣ этой области можно говорить только объ односторонней непрерывности (**182**), каковая имѣетъ мѣсто, ибо, какъ видѣли,

$$f(1-0) = -\frac{1}{3} = f(1).$$

2. Если же ограничимъ область аргумента условіемъ $x \geqslant 1$ и примемъ, что $f(1) = 1$, то можемъ сказать, что функція непрерывна во всей области аргумента, ибо, какъ видѣли,

$$f(1+0) = 1 = f(1).$$

2°. Разсмотримъ функцію:

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots .$$

Функція эта для всѣхъ значеній аргумента $x \gtrless 0$, представляя сумму безконечно убывающей геометрической прогрессіи, совпадаетъ съ функціею

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x}} = 1 + x^2;$$

но при $x=0$ функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ не совпадаютъ, ибо

$$f(0) = 0, \quad \varphi(0) = 1.$$

Принимая во вниманіе, что

$$\lim\,[f(x)]_{x=0} = \lim\,[\varphi(x)]_{x=0} = 1 = \varphi(0) \text{ не } = f(0),$$

заключаемъ, что, при $x=0$, $f(x)$ *претерпѣваетъ разрывъ непрерывности.*

Принявъ, однако, $f(0)=1$, можемъ разсматривать функцію $f(x)$, какъ непрерывную и для значенія $x=0$, будетъ ли это значеніе лежать внутри области аргумента или на ея границахъ, ибо

$$\lim[f(x)]_{x=0} = \varphi(0-0) = \varphi(0+0) = 1 = \varphi(0) = f(0).$$

§ IV. Основное свойство непрерывной функціи.

188. Теорема.—*Если $f(x)$ есть функція непрерывная въ области аргумента: $a \leqslant x \leqslant b$, то уравненіе*

$$f(x) = C,$$

гдѣ C есть данное, произвольное, число, заключенное между значеніями: $f(a)$ и $f(b)$, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень, удовлетворяющій неравенствамъ:

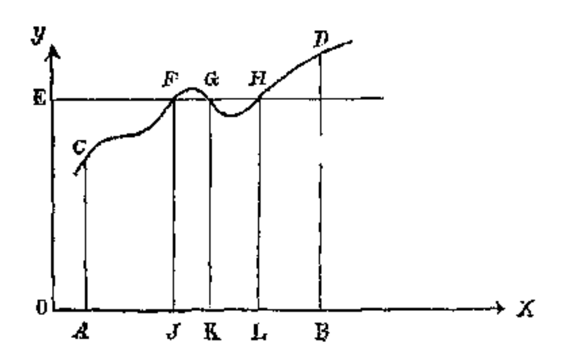
$$a < x < b,$$

т.-е., другими словами, функція $f(x)$ можетъ имѣть всякое данное значеніе C, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$, для одного или нѣсколькихъ значеній аргумента x, лежащихъ между a и b.

1°. Геометрическое истолкованіе теоремы. Положимъ, что кривая CD (черт. 30) графически изображаетъ функцію $f(x)$ въ области аргумента, границы коего суть абсциссы:

$$OA = a, \qquad OB = b;$$

Черт. 30.



ординаты AC и BD представятъ соотвѣтственныя значенія: $f(a)$ и $f(b)$ данной функціи, такъ что

$$AC = f(a), \qquad BD = f(b).$$

Возьмемъ отрѣзокъ $OE = C$, заключенный, по своей величинѣ, между ординатами AC и BD, и проведемъ прямую EH, параллельную оси OX; прямая эта пересѣчетъ кривую, по крайней мѣрѣ, въ одной точкѣ (на чертежѣ она пересѣкаетъ кривую въ трехъ точкахъ F, G и H); ординаты этихъ точекъ: JF, KG, HL, ..., будучи равны отрѣзку C, представятъ одно и то же значеніе функціи $f(x)$, соотвѣтствующее тремъ значеніямъ аргумента, равнымъ абсциссамъ OJ, OK, OL, ..., заключеннымъ между абсциссами a и b.

Итакъ, слѣдовательно, на прилагаемомъ чертежѣ функція $f(x)$ имѣетъ значеніе C, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$, для трехъ значеній аргумента: OJ, OK, OL, заключенныхъ между a и b, т.-е. уравненіе

$$f(x) = C$$

имѣетъ три рѣшенія, заключенныя между a и b.

2°. Аналитическое доказательство теоремы. Разсмотримъ функцію:

$$\varphi(x) = f(x) - C,$$

которая, очевидно, будетъ непрерывна вмѣстѣ съ $f(x)$. Отсюда

$$\varphi(a) = f(a) - C, \qquad \varphi(b) = f(b) - C.$$

Такъ какъ число C заключено, по условію, между $f(a)$ и $f(b)$, то одно изъ значеній: $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ есть число положительное, другое — отрицательное. Положимъ, что

$$\varphi(a) < 0, \qquad \varphi(b) > 0,$$

и возьмемъ три числа:

$$a, \quad \frac{a+b}{2}, \quad b, \tag{1}$$

причемъ $\frac{a+b}{2}$ заключено, очевидно, между a и b. Если случится, что

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - C = 0, \text{ то } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = C,$$

и, слѣдовательно, теорема будетъ доказана, ибо, дѣйствительно, нашлось между a и b такое значеніе $\frac{a+b}{2}$, при которомъ значеніе $f(x)$ равно данному числу C, заключенному между $f(a)$ и $f(b)$.

Но положимъ, что этого не случится, и назовемъ первое изъ чиселъ (1), при которомъ $\varphi(x) > 0$, буквою b_1, а предъидущее—буквою a_1, такъ что:

$$\varphi(a_1) < 0, \qquad \varphi(b_1) > 0,$$

и разсмотримъ три числа:

$$a_1, \quad \frac{a_1+b_1}{2}, \quad b_1, \tag{2}$$

изъ коихъ число $\frac{a_1+b_1}{2}$, будучи заключено между a_1 и b_1, содержится между a и b, причемъ разность $b_1 - a_1$ вдвое менѣе разности $b - a$, такъ что: $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Если случится, что

$$\varphi\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) - C = 0, \text{ то } f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = C,$$

и, слѣдовательно, теорема доказана. Но положимъ, что этого не случится, и назовемъ первое изъ чиселъ (2), при которомъ $\varphi(x) > 0$, буквою b_2, а предъидущее—буквою a_2, такъ что:

$$\varphi(a_2) < 0, \qquad \varphi(b_2) > 0,$$

и разсмотримъ три числа:

$$a_2, \quad \frac{a_2+b_2}{2}, \quad b_2, \tag{3}$$

изъ коихъ число $\frac{a_2+b_2}{2}$, заключенное между a_2 и b_2, содержится между a и b, причемъ разность $b_2 - a_2$ вдвое менѣе разности $b_1 - a_1$, такъ что:

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

Продолжая поступать подобнымъ образомъ, или придемъ къ такому числу, заключенному между a и b, которое обратитъ функцію $\varphi(x)$ въ нуль или, что то же, функцію $f(x)$ въ число C, и тогда теорема будетъ доказана, или образуемъ двѣ *послѣдовательности*:

$$\begin{array}{l} a, \ a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots, \\ b, \ b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_n, \ \ldots, \end{array}$$

изъ коихъ первая не убываетъ, вторая не возрастаетъ; слѣдовательно, каждая изъ нихъ стремится къ предѣлу, причемъ предѣлъ этотъ одинъ и тотъ же для обѣихъ послѣдовательностей, ибо

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

стремится къ нулю при безграничномъ возрастаніи n.

Предѣлъ этотъ заключенъ между a и b. Назвавъ его буквою r, получимъ:

$$r = \lim(a_n)_{n=\infty} = \lim(b_n)_{n=\infty}.$$

Образуемъ теперь двѣ *послѣдовательности:*

$$\varphi(a),\quad \varphi(a_1),\quad \varphi(a_2),\quad \ldots,\quad \varphi(a_n),\quad \ldots,$$
$$\varphi(b),\quad \varphi(b_1),\quad \varphi(b_2),\quad \ldots,\quad \varphi(b_n),\quad \ldots$$

Каждая изъ этихъ послѣдовательностей имѣетъ одинъ и тотъ же предѣлъ $\varphi(r)$, ибо, по *непрерывности* функціи $\varphi(x)$,

$$\lim[\varphi(a_n)]_{n=\infty} = \varphi[\lim(a_n)_{n=\infty}] = \varphi(r),$$
$$\lim[\varphi(b_n)]_{n=\infty} = \varphi[\lim(b_n)_{n=\infty}] = \varphi(r).$$

Съ другой стороны первая (вторая) изъ этихъ послѣдовательностей есть последовательность отрицательныхъ (положительныхъ) чиселъ; слѣдовательно,

$$\varphi(r) \leqslant 0, \qquad \varphi(r) \geqslant 0.$$

Эти два результата требуютъ, для совмѣстнаго существованія, чтобы

$$\varphi(r) = 0, \text{ т.-е. чтобы } f(r) - C = 0,$$

откуда

$$f(r) = C.$$

Равенство это и доказываетъ теорему, ибо оно говоритъ, что между числами a и b существуетъ такое число r, при которомъ значеніе функціи $f(x)$ равно числу C, заключенному между $f(a)$ и $f(b)$ и произвольно выбранному.

187. Слѣдствіе. — *Если $f(a)$ и $f(b)$ имѣютъ противоположные знаки, т.-е. $f(a) \lesseqgtr 0$ и $f(b) \gtreqless 0$, то существуетъ такое значеніе r, заключенное между a и b, при которомъ $f(r) = 0$, или, другими словами, функція $f(x)$ имѣетъ корень r* [1]*), заключенный между a и b.* И въ самомъ дѣлѣ, при заданныхъ условіяхъ: $f(a) \lesseqgtr 0$ и $f(b) \gtreqless 0$, можемъ взять $C = 0$, ибо 0 заключено между

$$f(a) \qquad \text{и} \qquad f(b).$$

Слѣдствіе это очень просто поясняется графически.

И въ самомъ дѣлѣ, если одно изъ значеній: $f(a)$ и $f(b)$ есть число положительное, а другое — отрицательное, то точки M и N, имѣющія ординатами значенія: $f(a)$ и $f(b)$, лежатъ по различнымъ сторонамъ оси x-овъ

Кривая, изображающая функцію $f(x)$ (черт. 31) и, слѣдовательно, проходящая черезъ точки M и N, должна, по непрерывности функціи, непремѣнно пересѣчь ось x по крайней мѣрѣ въ одной точкѣ (на чертежѣ она пересѣкаетъ въ трехъ точкахъ (C,

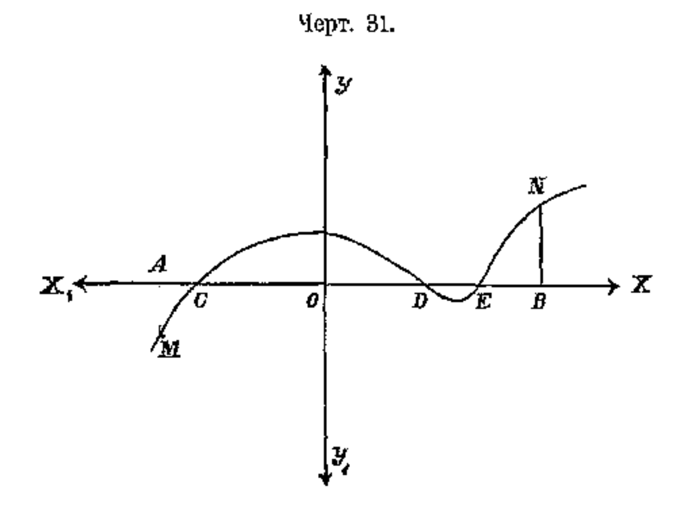
---

[1]) *Корнемъ* функціи называется также значеніе аргумента, которому соотвѣтствуетъ значеніе функціи, равное нулю. Напр., *корни* функціи $x^2 - 5x + 6$ суть 2 и 3.

D, E). Ординаты этихъ точекъ, представляющія значенія $f(x)$ для значеній аргумента x, равныхъ абсциссамъ этихъ точекъ:—OC, OD и OF, равны *нулю*. Итакъ, слѣдовательно, разсматриваемая функція $f(x)$ имѣетъ значеніе, равное O, заключенное между ординатами $f(a) = -AM$ и $f(b) = BN$, для трехъ абсциссъ: $-OC$, OD и OE, заключенныхъ между абсциссами:

$$a = -OA \qquad \text{и} \qquad b = OB.$$

Черт. 31.



188. Логариѳмическая функція. — Функція a^x есть функція непрерывная для всякой области аргумента, причемъ:

$$a^{-\infty} = 0 \quad , \quad a^{+\infty} = +\infty, \quad \text{если} \quad a > 1,$$

и

$$a^{-\infty} = +\infty, \quad a^{+\infty} = 0 \quad , \quad \text{если} \quad a < 1.$$

Предыдущая теорема говоритъ, что какое бы число C не было взято между 0 и $+\infty$, т.-е. для *всякаго* **положительнаго числа** C, **существуетъ** *такой показатель* r, *при которомъ*

$$a^r = C.$$

Показатель r *называется*, какъ извѣстно, **логариѳмомъ положительнаго** *числа* C *при основаніи* a *и обозначается такимъ образомъ:*

$$r = \log_a C.$$

Этотъ показатель r есть единственный для даннаго C, ибо если $r_1 > r$, то

$$a^{r_1} \gtrless a^r,$$

смотря по тому, будетъ ли $a \gtrless 1$.

Доказанное предложеніе о показателѣ r говоритъ, что *перемѣнное y, опредѣленное равенствомъ*

$$y = \log_a x,$$

есть функція аргумента x для области:

$$x \geqslant 0,$$

ибо всякому значенію C аргумента, взятому въ этой области, отвѣчаетъ опредѣленное значеніе r перемѣннаго y.

Функція эта называется **логариѳмическою.**

ГЛАВА II.

Основныя свойства тригонометрическихъ (круговыхъ) функцій.

§ I. Понятія о тригонометрическихъ функціяхъ.

189. Синусъ и косинусъ аргумента, область котораго имѣетъ границами числа: $-\pi$ и $+\pi$. Положимъ, что x представляетъ *непрерывный* (**173**) аргументъ, и разсмотримъ область:

$$-\pi \leqslant x \leqslant +\pi, \tag{1}$$

гдѣ π есть постоянное число, представляющее отношеніе длины произвольной окружности къ діаметру этой окружности; приближенныя значенія чиселъ π и $\frac{1}{\pi}$ и ихъ обыкновенныхъ логариѳмовъ таковы:

$$\pi = 3{,}14159265; \qquad \log \pi = 0{,}4971499;$$
$$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183099; \qquad \log \frac{1}{\pi} = \overline{1}{,}5028501.$$

1°. Синусомъ *аргумента въ области* (1) *называется нѣкоторая* **функція** *этого аргумента, значеніе которой, соотвѣтствующее зна-*

ченію a аргумента въ этой области, равно **синусу** *того угла (дуги), которому соотвѣтствуетъ* **тригонометрическій** *уголъ* (**3**, 4°), *равный числу a.*

2°. Косинусомъ *аргумента въ области* (1) *называется нѣкоторая* **функція** *этого аргумента, значеніе которой, соотвѣтствующее значенію a аргумента въ этой области, равно* **косинусу** *того угла (дуги), которому соотвѣтствуетъ* **тригонометрическій** *уголъ, равный числу a.*

Понятія эти не противорѣчатъ установленному выше (**174**) понятію о функціи, ибо каждому опредѣленному значенію аргумента изъ области (1), какъ положительному, такъ и отрицательному, разсматриваемому, какъ тригонометрическій уголъ, соотвѣтствуетъ **одинъ** опредѣленный геометрическій уголъ, положительный или отрицательный, а этому углу соотвѣтствуетъ **одинъ** опредѣленный синусъ и **одинъ** опредѣленный косинусъ.

Синусъ и *косинусъ* аргумента x означаются соотвѣтственно символами $\sin x$ и $\cos x$, гдѣ знаки: sin и cos суть *функціональные* знаки (**174**).

Изъ предыдущихъ опредѣленій слѣдуетъ, что, напримѣръ,

$$\sin(\pm 2{,}5) = \sin\left(\pm 180^0 . \frac{2{,}5}{\pi}\right) = \pm \sin 36^0 45' 38'',$$

$$\cos(\pm \sqrt{3}) = \cos\left(\pm 180^0 . \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) = \cos 99^0 14' 21''.$$

Такъ какъ синусъ и косинусъ аргумента x въ области (1) совпадаютъ соотвѣтственно съ синусомъ и косинусомъ тригонометрическаго угла x, то они удовлетворяютъ слѣдующимъ, установленнымъ въ первой части этого курса (**14**, **27**, **28**), равенствамъ:

$\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, гдѣ $0 \leqslant x \leqslant \pi$; (**A**)
$\sin(-\pi - x) = \sin x$, $\cos(-\pi - x) = -\cos x$, гдѣ $-\pi \leqslant x \leqslant 0$; (**B**)
$\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, гдѣ $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. (**C**)

190. Синусъ и косинусъ аргумента въ произвольной области. — Такъ какъ *символы* $\sin x$ и $\cos x$ опредѣлены пока только для области:

$$-\pi \leqslant x \leqslant +\pi, \qquad (1)$$

то для всякаго значенія аргумента, *выходящаго изъ этой области*, имѣемъ право давать какія-угодно опредѣленія этимъ символамъ.

Разсмотримъ два числа:

$$x + 2k\pi \quad \text{и} \quad x,$$

гдѣ k **произвольное** *цѣлое* число, и покажемъ, что, по крайней мѣрѣ, *одно изъ этихъ чиселъ выходитъ изъ области* (1). И въ самомъ дѣлѣ, если бы x принадлежало этой области, то $x+2k\pi$ принадлежало бы области:

$$-\pi+2k\pi \leqslant x+2k\pi \leqslant +\pi+2k\pi \qquad (1')$$

и, слѣдовательно, выходило бы изъ области (1), ибо границы области (1'): $(-\pi+2k\pi)$ и $(+\pi+2k\pi)$ удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$-\pi+2k\pi < +\pi+2k\pi \leqslant -\pi, \text{ при отрицательномъ } k,$$

и

$$+\pi+2k\pi > -\pi+2k\pi \geqslant \pi, \text{ при положительномъ } k.$$

Замѣтивъ это, примемъ, какъ **опредѣленіе**, слѣдующее свойство:

Для **всякаго** *значенія аргумента символы:* $\sin x$ *и* $\cos x$ *удовлетворяютъ слѣдующимъ равенствамъ:*

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x, \qquad \cos(x+2k\pi)=\cos x, \qquad [1]$$

гдѣ k *произвольное цѣлое число.*

Измѣнивъ въ этомъ равенствѣ x въ $(-\pi-x)$ и положивъ $k=1$, получимъ:

$$\sin(\pi-x)=\sin(-\pi-x), \qquad \cos(\pi-x)=\cos(-\pi-x).$$

Но для области $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ имѣли равенства (B):

$$\sin(-\pi-x)=\sin x, \qquad \cos(-\pi-x)=-\cos x,$$

а потому, для этой же области,

$$\sin(\pi-x)=\sin x, \qquad \cos(\pi-x)=-\cos x.$$

Сопоставляя эти равенства съ равенствами (A), получимъ:

$$\sin(\pi-x)=\sin x, \qquad \cos(\pi-x)=-\cos x \qquad [A]$$

для области:

$$-\pi \leqslant x \leqslant +\pi. \qquad (1)$$

Далѣе, принимая во вниманіе, что $(-x)$ лежитъ въ области (1), если x лежитъ въ этой области, можемъ измѣнить въ предыдущихъ равенствахъ x въ $(-x)$ и получимъ:

$$\sin(\pi+x)=\sin(-x), \qquad \cos(\pi+x)=-\cos(-x);$$

откуда, принимая во вниманіе равенства (C), найдемъ:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x.$$

Итакъ, *для области:*

$$-\pi \leqq x \leqq +\pi$$

имѣемъ:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x. \qquad [A']$$

Установивъ свойства, выражаемыя равенствами [A] и [A'], покажемъ, что

Символы $\sin x$ *и* $\cos x$, *для всякаго значенія аргумента, суть* **функціи** *этого аргумента, т.-е. данному значенію аргумента, изъ какой угодно области, соотвѣтствуетъ* **одно** *опредѣленное значеніе символа* $\sin x$ *и* **одно** *опредѣленное значеніе символа* $\cos x$.

И въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ *какое ни есть* значеніе x аргумента, положительное или отрицательное. Назовемъ буквою l *цѣлое* число, *небольшее* числа $\frac{x}{\pi}$ и *ближайшее* къ нему [1]).

Это число l удовлетворитъ, слѣдовательно, неравенствамъ:

$$0 \leqq \frac{x}{\pi} - l < 1, \quad \text{откуда} \quad 0 \leqq x - l\pi < \pi.$$

Принимая во вниманіе, что

$$x = l\pi + (x - l\pi),$$

получимъ:

$$\sin x = \sin[l\pi + (x - l\pi)], \qquad \cos x = \cos[l\pi + (x - l\pi)].$$

Если l есть *четное* число, т.-е. имѣетъ видъ $2k$, то, на основаніи равенствъ [1], имѣемъ:

$$\sin x = \sin(x - l\pi), \qquad \cos x = \cos(x - l\pi).$$

Если l есть *нечетное* число, т.-е. имѣетъ видъ $(2k+1)$, то, на основаніи равенствъ [1] и [A'], получимъ:

$$\sin x = -\sin(x - l\pi), \qquad \cos x = -\cos(x - l\pi).$$

---

[1]) [*Примѣры.* Если $\frac{x}{\pi} = 5$, то $l = 5$. Если $\frac{x}{\pi} = 5{,}27\ldots$, то $l = 5$. Если $\frac{x}{\pi} = -5$, то $l = -5$. Если $\frac{x}{\pi} = -5{,}27$, то $l = -6$].

Итакъ, *будемъ имѣть:*

$$\sin x = (-1)^l . \sin(x - l\pi), \qquad \cos x = (-1)^l . \cos(x - l\pi). \qquad [2]$$

гдѣ цѣлое число l опредѣлено, при данномъ x, неравенствами:

$$0 \leqslant \frac{x}{\pi} - l < 1, \quad \textit{или, что то же} \quad 0 \leqslant x - l\pi < \pi.$$

Такъ какъ каждому значенію x отвѣчаетъ *одно* совершенно опредѣленное значеніе $(x - l\pi)$, не выходящее изъ области, границы которой суть 0 и π, и такъ какъ этому значенію отвѣчаетъ *одинъ* опредѣленный синусъ и *одинъ* опредѣленный косинусъ, то, какъ показываютъ равенства [2], каждый изъ символовъ: $\sin x$ и $\cos x$ имѣетъ, для каждаго значенія аргумента x, *одно* совершенно опредѣленное значеніе, т.-е. каждый изъ нихъ представляетъ **функцію** *аргумента x для любой области этого аргумента. Это и хотѣли установить.* Назовемъ равенства [2] **основными**.

Обозначивъ буквою n число градусовъ, содержащихся въ углѣ, которому соотвѣтствуетъ тригонометрическій уголъ, равный числу $(x - l\pi)$, можемъ формулы [2], опредѣляющія тригонометрическія функціи, написать въ такомъ видѣ:

$$\sin x = (-1)^l . \sin(n^0), \qquad \cos x = (-1)^l . \cos(n^0), \qquad [2]$$

гдѣ

$$n^0 = 180^0 . \frac{x - l\pi}{\pi}.$$

Итакъ, слѣдовательно,

1°. *Установивъ опредѣленія функцій* $\sin x$ *и* $\cos x$ *для значеній аргумента, заключенныхъ между* $-\pi$ и $+\pi$, и

2. *Принявъ, для всевозможныхъ значеній аргумента и при всякомъ цѣломъ k, равенства:*

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \qquad [1]$$

что имѣли право сдѣлать,

получаемъ, для всевозможныхъ значеній аргумента, обѣ функціи $\sin x$ *и* $\cos x$, *опредѣляемыя равенствами:*

$$\sin x = (-1)^l \sin(x - l\pi), \qquad \cos x = (-1)^l \cos(x - l\pi), \qquad [2]$$

гдѣ l есть цѣлое число, небольшее числа $\frac{x}{\pi}$ и ближайшее къ нему.

Значенія синуса и косинуса для значенія аргумента, равнаго числу a, называются *синусомъ и косинусомъ числа a* и означаются такъ: $\sin a$ и $\cos a$.

191. Границы, между которыми лежатъ всѣ значенія $\sin x$ **и всѣ значенія** $\cos x$. Изъ первой части этого курса извѣстно, что синусы и косинусы угловъ заключены въ границахъ -1 и $+1$, причемъ:

$$\sin 0^0 = \sin 0 = 0, \qquad \cos 0^0 = \cos 0 = +1,$$
$$\sin 90^0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos 90^0 = \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$
$$\sin 180^0 = \sin \pi = 0, \qquad \cos 180^0 = \cos \pi = -1.$$

Такъ какъ $(x - l\pi)$, при всякомъ x, лежитъ между 0 и π, то $\sin(x - l\pi)$ заключенъ между 0 и 1 и $\cos(x - l\pi)$ заключенъ между -1 и $+1$.

На основаніи этихъ замѣчаній и равенствъ [2] заключаемъ:

Всѣ значенія, которыя способна принимать каждая изъ функцій: sin x и cos x, для всевозможныхъ значеній аргумента, лежатъ въ области (—1, 1).

Слѣдовательно, значенія функцій $\sin x$ и $\cos x$, для всевозможныхъ значеній x, удовлетворяютъ условіямъ:

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, откуда: $\sin x \leqslant 1$, $\cos x \leqslant 1$ $\qquad (a)$

192. Соотношеніе между функціями $\sin x$ **и** $\cos x$ **для одного и того же значенія аргумента.** — Изъ первой части этого курса извѣстно, что между синусомъ и косинусомъ одного и того же угла A существуетъ соотношеніе.

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Слѣдовательно, для всякаго значенія a аргумента, лежащаго въ области $(0, \pi)$, имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

Покажемъ, что *подобное соотношеніе существуетъ для* **всякаго** *значенія аргумента.*

И въ самомъ дѣлѣ, основныя равенства:

$$\sin x = (-1)^l \sin(x - l\pi), \qquad \cos x = (-1)^l \cos(x - l\pi)$$

даютъ:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2(x - l\pi) + \cos^2(x - l\pi).$$

Но $(x - l\pi)$ лежитъ въ области $(0, \pi)$; слѣдовательно,

$$\sin^2(x - l\pi) + \cos^2(x - l\pi) = 1,$$

а потому

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad [3]$$

для всякаго значенія x, что и требовалось доказать.

193. Тангенсъ и котангенсъ аргумента — Каждое изъ выраженій:

$$\frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{и} \quad \frac{\cos x}{\sin x}$$

представляетъ функцію аргумента x, ибо каждому значенію аргумента [за исключеніемъ только тѣхъ значеній, которыя обращаютъ знаменателей: $\sin x$ и $\cos x$ въ нули] отвѣчаетъ **одно** опредѣленное значеніе для этого выраженія.

Функціи эти называются соотвѣтственно **тангенсомъ** и **котангенсомъ** аргумента x и означаются символами: $\operatorname{tang} x$ и $\operatorname{cotg} x$.

Итакъ, по опредѣленію,

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \qquad [4]$$

Значенія этихъ функцій для даннаго значенія a аргумента называются соотвѣтственно *тангенсомъ* и *котангенсомъ числа* a и означаются такъ: $\operatorname{tang} a$ и $\operatorname{cotg} a$.

Видимъ (II), что тангенсъ и котангенсъ числа, лежащаго между $-\pi$ и $+\pi$, совпадаютъ соотвѣтственно съ тангенсомъ и котангенсомъ того угла, которому соотвѣтствуетъ тригонометрическій уголъ, равный этому числу.

Опредѣленія [4] даютъ слѣдующія формулы, аналогичныя формуламъ [A], [A'] и [2]:

$$\operatorname{tang}(\pi - x) = -\operatorname{tang} x, \qquad \operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg} x; \qquad [A]$$

$$\operatorname{tang}(\pi + x) = \operatorname{tang} x, \qquad \operatorname{cotg}(\pi + x) = \operatorname{cotg} x; \qquad [A']$$

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}(x - l\pi), \qquad \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x - l\pi). \qquad [2]$$

194. Секансъ и косекансъ аргумента. — Каждое изъ выраженій:

$$\frac{1}{\cos x} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sin x}$$

представляетъ функцію аргумента x, ибо каждому значенію аргумента [за исключеніемъ только тѣхъ значеній, которыя обращаютъ знаменателей: $\cos x$ и $\sin x$ въ нули] отвѣчаетъ **одно** опредѣленное значеніе для этихъ выраженій. Функціи эти называются соотвѣтственно **секансомъ** и **косекансомъ** *аргумента* x и означаются символами: $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$.

Итакъ, по опредѣленію,

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}. \qquad [5]$$

Значенія этихъ функцій для даннаго значенія a аргумента называются соотвѣтственно *секансомъ* и *косекансомъ числа* a и означаются такъ: $\sec a$ и $\operatorname{cosec} a$.

Равенства [5] даютъ:

$$|\sec x| = \frac{1}{|\cos x|}, \qquad |\operatorname{cosec} x| = \frac{1}{|\sin x|}.$$

Отсюда, принимая во вниманіе условія (a) (191), получимъ:

$$|\sec x| \geqslant 1, \qquad |\operatorname{cosec} x| \geqslant 1.$$

Слѣдовательно, значенія функцій $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$, для всевозможныхъ значеній аргумента, удовлетворяютъ условіямъ:

$$\sec x \leqslant -1 \text{ и } \sec x \geqslant 1, \qquad \operatorname{cosec} x \leqslant -1 \text{ и } \operatorname{cosec} x \geqslant 1.$$

Опредѣленія **[5]** даютъ слѣдующія формулы, аналогичныя формуламъ **[A]**, **[A']** и **[2]**:

$$\sec(\pi - x) = -\sec x, \qquad \operatorname{cosec}(\pi - x) = \operatorname{cosec} x, \qquad [A]$$
$$\sec(\pi + x) = -\sec x, \qquad \operatorname{cosec}(\pi + x) = -\operatorname{cosec} x, \qquad [A']$$
$$\sec x = (-1)^k \sec(x + k\pi), \qquad \operatorname{cosec} x = (-1)^k \operatorname{cosec}(x + k\pi). \qquad [2]$$

195. Тригонометрическія (круговыя) функціи.—Функціи:

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \operatorname{cotg} x, \quad \sec x, \quad \operatorname{cosec} x$$

называются **тригонометрическими или круговыми функціями.** Онѣ играютъ въ математикѣ первенствующую роль. Значенія тригонометрическихъ функцій для значенія аргумента, равнаго числу a, будемъ называть, для сокращенія рѣчи, **тригонометрическими элементами числа** a въ соотвѣтствіе съ тригонометрическими элементами угла, которому отвѣчаетъ тригонометрическій уголъ, равный числу a, когда a лежитъ между 0 и π.

196. Періодичность тригонометрическихъ функцій. — На основаніи равенствъ **[1]** и при помощи опредѣленій **[4]** и **[5]** получимъ:

$$\operatorname{tang}(x + 2k\pi) = \operatorname{tang} x, \qquad \operatorname{cotg}(x + 2k\pi) = \operatorname{cotg} x; \qquad [1']$$
$$\sec(x + 2k\pi) = \sec x, \qquad \operatorname{cosec}(x + 2k\pi) = \operatorname{cosec} x. \qquad [1'']$$

Равенства: [1], [1'] и [1''] выражаютъ слѣдующее **основное свойство** тригонометрическихъ функцій: *значенія тригонометрическихъ функцій не измѣняются, если соотвѣтствующія значенія аргумента увеличиваются или уменьшаются на* **произвольное кратное числа** 2π. Свойство это называется **періодичностью** тригонометрическихъ функцій, причемъ число 2π называется **періодомъ**. Увидимъ, что функціи: sin, cos, sec и cosec не обладаютъ *меньшимъ* періодомъ, между тѣмъ какъ функціи tg и cotg (**193, 221**) обладаютъ меньшимъ періодомъ, равнымъ числу π.

§ II. Приведеніе значеній аргумента въ область $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

197. Теорема.— *Каждый тригонометрическій элементъ числа a равенъ,* **съ точностью до знака** [1]*, одноименному тригонометрическому элементу нѣкотораго числа, принадлежащаго области* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

И въ самомъ дѣлѣ, замѣнивъ въ *основныхъ* формулахъ [2] аргументъ x числомъ a, увидимъ, что каждый изъ тригонометрическихъ элементовъ числа a равенъ, съ точностью до знака, одноименному тригонометрическому элементу числа $(a - l\pi) = \left[\frac{a}{\pi} - l\right]\pi$, принадлежащаго, какъ видѣли, области $(0, \pi)$ и. слѣдовательно, принадлежащаго одной изъ областей: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ или $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

1°. *Число* $\left[\frac{a}{\pi} - l\right]\pi$ *принадлежитъ области* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Теорема имѣетъ мѣсто.

2°. *Число* $\left[\frac{a}{\pi} - l\right]\pi$ *принадлежитъ области* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Формулы [**A**] показываютъ, что каждый изъ тригонометрическихъ элементовъ этого числа равенъ, съ точностью до знака, одноименному тригонометрическому элементу числа

$$\pi - \left[\frac{a}{\pi} - l\right]\pi,$$

принадлежащаго области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Теорема доказана.

Примѣры. — 1°. Если $a = -\frac{17\pi}{3}$, то $\frac{a}{\pi} = -\frac{17}{3}$, $l = -6$,

---

[1]) Два числа наз. *равными съ точностью до знака*, если модули этихъ чиселъ равны. Отсюда слѣдуетъ, что эти числа или равны, или отличаются знаками.

и число $\left[\frac{a}{\pi} - l\right]\pi = \frac{\pi}{3}$, т.-е. принадлежитъ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; формулы [2] даютъ непосредственно:

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = (-1)^{-6}\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = (-1)^{-6}\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60^0 = \frac{1}{2},$$

и т. п. для другихъ функцій.

2°. Если $a = \frac{35\pi}{6}$, то $\frac{a}{\pi} = \frac{35}{6}$, $l = 5$, и число $\left[\frac{\pi}{a} - l\right]\pi = \frac{5\pi}{6}$ принадлежитъ области $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, причемъ число $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ уже принадлежитъ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Формулы [2] и [A] даютъ послѣдовательно:

$$\sin\frac{35\pi}{6} = (-1)^5\sin\frac{5\pi}{6} = (-1)^5\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{35\pi}{6} = (-1)^5\cos\frac{5\pi}{6} = -(-1)^5\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3°. Если $a = -\frac{715}{4}$, то $\frac{a}{\pi}$ можетъ быть вычислено [1]) только приближенно; $\frac{a}{\pi} = -56{,}898$; $l = -57$, и число $\left[\frac{a}{\pi} - l\right]\pi = 0{,}102\pi$ лежитъ въ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Формулы [2] даютъ непосредственно:

$$\sin\left(-\frac{715}{4}\right) = (-1)^{57}\sin(0{,}102\pi) = -\sin(180^0.0{,}102) = -\sin 18^0 24',$$
$$\cos\left(-\frac{715}{4}\right) = (-1)^{57}\cos(0{,}102\pi) = -\cos(180^0.0{,}102) = -\cos 18^0 24'.$$

4°. Предлагаемъ для упражненій:

$$a = \frac{355}{113}, \quad a = \sqrt[3]{62}.\mathrm{tang}\,115^0 37', \quad a = \log 3795{,}69.$$

198. Приведеніе аргумента въ область $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.—Предъидущая теорема приводитъ значеніе a аргумента къ значенію b, при-

---

[1]) Вычисленіе можетъ быть выполнено при помощи логариѳмическихъ таблицъ.

надлежащему области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Если значеніе b принадлежитъ области $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, то дополнительное значеніе [1])

$$c = \frac{\pi}{2} - b$$

принадлежитъ области $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, причемъ (15):

$$\sin b = \cos c, \quad \cos b = \sin c, \quad \operatorname{tang} b = \operatorname{cotg} c,$$
$$\operatorname{cosec} b = \sec c, \quad \sec b = \operatorname{cosec} c, \quad \operatorname{cotg} b = \operatorname{tang} c.$$

Итакъ, *всякое значеніе аргумента можетъ быть* **приведено** *къ значенію, лежащему въ области* $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Примѣръ. — Если $a = \frac{537}{100}\pi$, то $\frac{a}{\pi} = \frac{537}{100}$, $l = 5$, $\left(\frac{a}{\pi} - l\right)\pi = \frac{37}{100}\pi$. Это число принадлежитъ области $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Замѣнивъ его дополнительнымъ числомъ $\frac{13}{100}\pi$, послѣдовательно получимъ:

$$\sin\left(\frac{537}{100}\pi\right) = (-1)^5 \sin\left(\frac{37}{100}\pi\right) = -\cos\left(\frac{13}{100}\pi\right) = -\cos 2°20'24'',$$

и т. п. для другихъ функцій.

§ III. Корни тригонометрическихъ функцій.

199. Опредѣленіе.—Корнемъ *функціи называется значеніе аргумента, при которомъ значеніе функціи равно* **нулю.**

Примѣры. Число $\left(-\frac{b}{a}\right)$ есть корень функціи $ax + b$.—Числа: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ суть корни функціи $ax^2 + bx + c$.— Число 1 есть корень функціи $\log x$.

200. Корни тригонометрическихъ функцій въ области $(0, \pi)$.—Изъ первой части этого курса извѣстно, что синусъ и тангенсъ положительнаго угла равны нулю тогда и только тогда, когда этотъ уголъ равенъ или *нулю*, или *суммѣ двухъ прямыхъ*

---

[1]) Два значенія аргумента называются *дополнительными*, если ихъ сумма равна числу $\frac{\pi}{2}$.

угловъ; косинусъ и котангенсъ положительнаго угла равны нулю только тогда, когда этотъ уголъ равенъ *прямому углу.* Отсюда и принимая во вниманіе, что тригонометрическіе углы (дуги), соотвѣтствующіе угламъ, равнымъ нулю, прямому углу и суммѣ двухъ прямыхъ угловъ, суть соотвѣтственно числа: 0, $\frac{\pi}{2}$ и π, заключаемъ, что *въ области* $(0, \pi)$ *корнями функцій:* $\sin x$ *и* $\operatorname{tang} x$ *служатъ* только *числа* 0 *и* π, *причемъ корень функцій:* $\cos x$ *и* $\operatorname{cotg} x$ *есть* только *число* $\frac{\pi}{2}$. Итакъ,

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \pi = 0, \quad \operatorname{tang} 0 = 0, \quad \operatorname{tang} \pi = 0,$$
$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = 0.$$

201. Корни тригонометрическихъ функцій въ произвольной области аргумента. — А. Корни синуса. — Теорема. $\operatorname{Sin} x$ *имѣетъ безчисленное множество корней, причемъ:* **1°**, *всякій корень* $\sin x$ *заключенъ въ формулѣ* $k\pi$ *и* **2°**, *обратно, всякое число, заключенное въ формулѣ* $k\pi$, *гдѣ* k *произвольное цѣлое число, есть корень* $\sin x$.

Разсмотримъ *основное* равенство:

$$\sin x = (-1)^l \sin(x - l\pi).$$

1°. Положимъ, что число a есть корень $\sin x$, такъ что $\sin a = 0$. Основное равенство дастъ:

$$\sin(a - l\pi) = 0.$$

Такъ какъ число $(a - l\pi)$ не менѣе нуля и менѣе π, то единственное значеніе, которому можетъ быть равно это число, есть нуль (**200**). Итакъ,

$$a - l\pi = 0, \quad \text{откуда} \quad a = l\pi,$$

гдѣ l есть *нѣкоторое* цѣлое число, что и требовалось доказать.

2°. Обратно, *число* $k\pi$, *гдѣ* k **произвольное** *цѣлое число, есть корень* $\sin x$. И въ самомъ дѣлѣ, дадимъ аргументу x значеніе, равное $k\pi$, гдѣ k произвольное цѣлое число; тогда $\frac{x}{\pi} = k$ и $l = k$. Основное равенство дастъ:

$$\sin(k\pi) = (-1)^k \sin(k\pi - k\pi) = (-1)^k \sin 0 = 0,$$

что и требовалось показать.

Б. Корни косинуса. — Теорема Cos$x$ *имѣетъ безчисленное множество корней, причемъ:* **1°**, *всякій корень* cos$x$ *заключенъ въ формулѣ* $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ *и* **2°**, *обратно, всякое число, заключенное въ формулѣ* $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, *гдѣ* k *произвольное цѣлое число, есть корень* cos$x$

Разсмотримъ основное равенство:

$$\cos x = (-1)^l \cos(x - l\pi).$$

1°. Положимъ, что число a есть корень $\cos x$, такъ что $\cos a = 0$. Основное равенство дастъ:

$$\cos(a - l\pi) = 0.$$

Такъ какъ число $(a - l\pi)$ не менѣе нуля и менѣе π, то единственное значеніе, которому можетъ быть равно это число, есть $\frac{\pi}{2}$ (**200**). Итакъ,

$$a - l\pi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{откуда} \quad a = (2l+1)\frac{\pi}{2},$$

гдѣ l есть *нѣкоторое* цѣлое число, что и требовалось доказать.

2°. Обратно, *число* $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, *гдѣ* k *произвольное цѣлое, есть корень* $\cos x$. И въ самомъ дѣлѣ, дадимъ аргументу x значеніе $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k произвольное цѣлое число; тогда $\frac{x}{\pi} = k + \frac{1}{2}$ и $l = k$. Основное равенство дастъ:

$$\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^k \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} - k\pi\right] = (-1)^k \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

что и требовалось показать.

В. Корни тангенса и котангенса. — Теорема. 1°. *Корни тангенса одинаковы съ корнями синуса.* **2°.** *Корни котангенса одинаковы съ корнями косинуса.*

Разсмотримъ равенства:

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

представляющія опредѣленія функцій: tang$x$ и cotg$x$.

Принимая во вниманіе, что *модули* знаменателей, при всякомъ значеніи x, не превышаютъ 1, заключаемъ, что tang$x$ и cotg$x$ обращаются въ нули только при тѣхъ значеніяхъ x, при коихъ обращаются въ нули ихъ числители, что и требовалось доказать.

Г. Корни секанса и косеканса. — Теорема. $\sec x$ *и* $\operatorname{cosec} x$ *не имѣютъ корней.*

Разсматривая равенства:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

представляющія опредѣленія функцій: $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$, видимъ, что ни та, ни другая изъ нихъ, ни при какомъ значеніи x, не обращаются въ нули, ибо числители постоянны, а модули знаменателей не превышаютъ 1.

202. Замѣчаніе 1. — Давая послѣдовательно въ формулѣ: $k\pi$, представляющей корни $\sin x$ и $\operatorname{tang} x$, буквѣ k цѣлыя, возрастающія значенія:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

получимъ слѣдующій возрастающій рядъ корней функцій $\sin x$ и $\operatorname{tang} x$:

$$\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, +\pi, +2\pi, +3\pi, \ldots.$$

203. Замѣчаніе 2. — Давая въ формулѣ: $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, представляющей корни $\cos x$ и $\operatorname{cotg} x$, буквѣ k послѣдовательно цѣлыя возрастающія значенія:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

получимъ слѣдующій возрастающій рядъ корней $\cos x$ и $\operatorname{cotg} x$:

$$\ldots, -5\cdot\frac{\pi}{2}, -3\cdot\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}, +3\cdot\frac{\pi}{2}, +5\cdot\frac{\pi}{2}, \ldots.$$

204. Слѣдствіе. — Предъидущія теорѣмы говорятъ, что между *каждыми* двумя *послѣдовательными* корнями $\sin x (\operatorname{tang} x)$:

$$k\pi \text{ и } (k+1)\pi$$

заключается *одинъ* и **только** *одинъ* корень $\cos x (\operatorname{cotg} x)$:

$$(2k+1)\frac{\pi}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Обратно, между *каждыми* двумя *послѣдовательными* корнями $\cos x (\operatorname{cotg} x)$:

$$(2k+1)\frac{\pi}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{и} \quad (2k+3)\frac{\pi}{2} = \left(k + \frac{3}{2}\right)\pi$$

заключается *одинъ* и **только** *одинъ* корень $\sin x (\operatorname{tang} x)$:

$$(k+1)\pi.$$

Итакъ, слѣдовательно, имѣемъ: *корни синуса (тангенса)* **отдѣляютъ** *корни косинуса (котангенса)* и, обратно, *корни косинуса (котангенса)* **отдѣляютъ** *корни синуса (тангенса).*

Увидимъ это нагляднѣе, если выпишемъ, въ возрастающемъ порядкѣ, корни синуса (тангенса) и косинуса (котангенса):

$$\ldots, -3\pi, \underline{-5\frac{\pi}{2}}, -2\pi, \underline{-3\frac{\pi}{2}}, -\pi, \underline{-\frac{\pi}{2}}, 0, \underline{+\frac{\pi}{2}}, +\pi, \underline{+3\frac{\pi}{2}}, +2\pi, \underline{+5\frac{\pi}{2}}, \ldots,$$

гдѣ подчеркнутыя числа означаютъ корни косинуса (котангенса).

§ IV. Положительныя и отрицательныя значенія тригонометрическихъ функцій.

205. Синусъ. — Теорема. *Синусъ представляетъ:*

1°. Положительное *число для всякаго значенія аргумента, лежащаго между двумя послѣдовательными корнями* **синуса:** $k\pi$ *и* $(k+1)\pi$, *гдѣ* k **четное** *число.*

2°. Отрицательное *число для всякаго значенія аргумента, лежащаго между двумя послѣдовательными корнями* **синуса:** $k\pi$ *и* $(k+1)\pi$, *гдѣ* k **нечетное** *число.*

Для доказательства теоремы вспомнимъ, что синусъ всякаго положительнаго угла есть положительное число. Слѣдовательно, $\sin x$ представляетъ, согласно его опредѣленію, положительное число для всякаго значенія аргумента, лежащаго въ области $(0, \pi)$. Вспомнивъ это, докажемъ теорему.

Возьмемъ *основное* равенство (190):

$$\sin x = (-1)^l \sin(x - l\pi).$$

1°. Положимъ, что x заключено между двумя послѣдовательными корнями синуса: $k\pi$ и $(k+1)\pi$, гдѣ k есть *четное* число $2q$, такъ что:

$$2q\pi < x < (2q+1)\pi,$$

откуда

$$2q < \frac{x}{\pi} < 2q+1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что l, представляющее цѣлое число, не-

большее числа $\frac{x}{\pi}$ и ближайшее къ нему, равно $2q$. Основное равенство дастъ:

$$\sin x = \sin(x - l\pi).$$

Но $(x - l\pi)$ заключено между 0 и π; слѣдовательно, $\sin(x - l\pi) > 0$, а потому

$$\sin x > 0,$$

что и требовалось доказать.

2°. Положимъ, что x заключено между двумя послѣдовательными корнями $k\pi$ и $(k+1)\pi$ синуса, гдѣ k есть *нечетное* число $(2q+1)$, такъ что:

$$(2q+1)\pi < x < (2q+2)\pi,$$

откуда

$$(2q+1) < \frac{x}{\pi} < (2q+1)+1;$$

слѣдовательно, $l = 2q + 1$, и основное равенство даетъ:

$$\sin x = -\sin(x - l\pi),$$

откуда

$$\sin x < 0,$$

что и требовалось доказать.

Отмѣтимъ частный случай:

Синусъ положительный въ областяхъ: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ *и отрицательный въ областяхъ:* $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Доказанная теорема говоритъ, что, *при непрерывномъ* возрастаніи *аргумента, значенія, принимаемыя синусомъ, мѣняютъ знаки* только *при переходѣ аргумента черезъ какой ни есть* корень $k\pi$ *этой функціи, причемъ они становятся отрицательными, если k нечетное, и положительными, если k четное.*

При убываніи аргумента явленіе будетъ *обратное.*

206. Косекансъ.—Такъ какъ, согласно опредѣленію,

$$\sin x \,.\, \operatorname{cosec} x = 1,$$

то $\sin x$ и $\operatorname{cosec} x$, для одного и того же значенія аргумента, совмѣстно положительны и совмѣстно отрицательны, а потому предъидущая теорема имѣетъ мѣсто и для $\operatorname{cosec} x$.

207. Замѣчаніе. — Замѣтимъ, что числа: $k\pi$, представляя корни $\sin x$, не суть, однако, корни $\operatorname{cosec} x$, ибо, какъ видѣли **(201, Г)**, $\operatorname{cosec} x$ не имѣетъ корней.

Имѣемъ, слѣдовательно, примѣръ того, что значенія функціи могутъ мѣнять знакъ и при переходѣ аргумента черезъ число, не представляющее корня функціи. Увидимъ **(220, 2⁰)** однако, что числа $k\pi$ имѣютъ для $\operatorname{cosec} x$ особое значеніе [1]).

208. Косинусъ. — **Теорема.** *Косинусъ представляетъ:*

1⁰. Положительное *число для всякаго значенія аргумента, лежащаго между двумя послѣдовательными корнями* **косинуса:** $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ *и* $(2k+3)\frac{\pi}{2}$, *если* k **нечетное.**

2⁰. Отрицательное *число для всякаго значенія аргумента, лежащаго между двумя послѣдовательными корнями* **косинуса:** $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ *и* $(2k+3)\frac{\pi}{2}$, *если* k **четное.**

Для доказательства теоремы вспомнимъ, что косинусъ остраго угла есть число положительное и косинусъ тупого угла есть число отрицательное.

Слѣдовательно, косинусъ представляетъ, согласно его опредѣленію, положительное число для значеній аргумента, лежащихъ въ области: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, и отрицательное число — для значеній аргумента, лежащихъ въ области: $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Вспомнивъ это, докажемъ теорему. Возьмемъ *основное* равенство:

$$\cos x = (-1)^l \cos(x - l\pi).$$

1⁰. Положимъ, что x заключено между двумя послѣдовательными корнями косинуса: $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ и $(2k+3)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k есть *нечетное* число $(2q-1)$, такъ что:

$$(4q-1)\frac{\pi}{2} < x < (4q+1)\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$2q - \frac{1}{2} < \frac{x}{\pi} < 2q + \frac{1}{2};$$

---

[1]) Замѣтимъ, что функція можетъ и не мѣнять знака при переходѣ аргумента черезъ корень. Напр., функція $(x-1)^2$ представляетъ, для всѣхъ значеній аргумента, положительное число; слѣдовательно, при переходѣ аргумента черезъ ея корень, равный 1, она остается, какъ и была, положительною.

слѣдовательно, $l = 2q$, или же $= 2q - 1$, и, въ соотвѣтствіе съ этимъ,

$$-\frac{\pi}{2} < x - l\pi < \frac{\pi}{2}, \text{ или же } \frac{\pi}{2} < x - l\pi < \frac{3\pi}{2};$$

но, съ другой стороны, $(x - l\pi)$ заключено между 0 и π; слѣдовательно,

$$0 < x - l\pi < \frac{\pi}{2}, \text{ если } l = 2q,$$

и

$$\frac{\pi}{2} < x - l\pi < \pi, \quad \text{если } l = 2q - 1,$$

т.-е.

$$\cos(x - l\pi) > 0, \quad \text{если } \; l = 2q,$$

и

$$\cos(x - l\pi) < 0, \quad \text{если } \; l = 2q - 1.$$

Теперь основное равенство даетъ:

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = (-1)^{2q} \quad \cos(x - l\pi) > 0 \\ \cos x = (-1)^{2q-1} \cos(x - l\pi) > 0 \end{array}\right\}, \text{ ч. и т. д.}$$

(и — between the two lines)

2°. Положимъ, что x заключено между двумя послѣдовательными корнями косинуса: $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ и $(2k + 3)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k есть *четное* число $2q$, такъ что:

$$(4q + 1)\frac{\pi}{2} < x < (4q + 3)\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$2q + \frac{1}{2} < \frac{x}{\pi} < (2q + 1) + \frac{1}{2};$$

слѣдовательно, $l = 2q$, или же $= 2q + 1$, и, въ соотвѣтствіе съ этимъ,

$$\frac{\pi}{2} < x - l\pi < \frac{3}{2}\pi, \text{ или же } 0 < x - l\pi < \frac{\pi}{2};$$

съ другой стороны,

$$0 < x - l\pi < \pi;$$

слѣдовательно,

$$\frac{\pi}{2} < x - l\pi < \pi, \text{ если } l = 2q,$$

и

$$0 < x - l\pi < \frac{\pi}{2}, \text{ если } l = 2q + 1,$$

т.-е.

$$\cos(x - l\pi) < 0, \text{ если } l = 2q,$$

и

$$\cos(x - l\pi) > 0, \text{ если } l = 2q + 1.$$

Теперь основное равенство даетъ:

и
$$\left.\begin{array}{l}\cos x = (-1)^{2q} \cos(x - l\pi) < 0 \\ \cos x = (-1)^{2q+1} \cos(x - l\pi) < 0\end{array}\right\}, \text{ ч. и т. д.}$$

Отмѣтимъ **частный случай:**

Косинусъ положительный въ областяхъ: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ *и отрицательный въ областяхъ:* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ и $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Доказанная теорема говоритъ, что, *при непрерывномъ возрастаніи аргумента, значенія, принимаемыя косинусомъ, мѣняютъ знакъ* **только** *при переходѣ аргумента черезъ какой ни есть корень* $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ *косинуса, причемъ они становятся отрицательными, если* k **четное,** *и положительными, если* k **нечетное.** При убываніи аргумента явленіе будетъ обратное.

209. Секансъ.—Такъ какъ, согласно опредѣленію,

$$\cos x \,.\, \sec x = 1,$$

то $\cos x$ и $\sec x$, для одного и того же значенія аргумента, совмѣстно положительны и совмѣстно отрицательны.

210. Замѣчаніе.—Замѣтимъ, что числа: $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, представляя корни $\cos x$, не суть, однако, корни $\sec x$, ибо, какъ видѣли **(201)**, $\operatorname{cosec} x$ не имѣетъ корней.

Имѣемъ, слѣдовательно, опять **(207)** примѣръ того, что значенія функціи могутъ мѣнять знакъ и при переходѣ аргумента черезъ число, не представляющее корня функціи. Увидимъ **(220, 1°)**, однако, что числа: $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ имѣютъ для $\sec x$ особое значеніе.

211. Тангенсъ.—Теорема. *Тангенсъ представляетъ:*

1°. Положительное *число для всякаго значенія аргумента, лежащаго между двумя послѣдовательными корнями:* $k\pi$ *и* $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ *синуса и косинуса.* **2°. Отрицательное** *число для всякаго значенія аргумента, лежащаго между двумя послѣдовательными корнями:* $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ *и* $(k+1)\pi$ *тѣхъ же функцій.*

Замѣтимъ, что изъ *опредѣленія* $\operatorname{tang} x$, выражаемаго равенствомъ:

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

слѣдуетъ, что $\operatorname{tang} x$ представляетъ положительное число въ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ аргумента и отрицательное для области $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Замѣтивъ это, докажемъ теорему.

Возьмемъ основное равенство:

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}(x - l\pi).$$

1°. Положимъ, что x заключено между $k\pi$ и $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, такъ что

$$k\pi < x < \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

откуда

$$k < \frac{x}{\pi} < k + \frac{1}{2},$$

и, слѣдовательно, $l = k$. А потому

$$0 < x - l\pi < \frac{\pi}{2}, \text{ т.-е. } \operatorname{tang}(x - l\pi) > 0,$$

и основное равенство даетъ:

$$\operatorname{tang} x > 0,$$

что и требовалось доказать.

2°. Положимъ, что x заключено между $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ и $(k+1)\pi$, такъ что

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi < x < (k+1)\pi,$$

откуда

$$k + \frac{1}{2} < \frac{x}{\pi} < k + 1,$$

и, слѣдовательно, $l = k$. А потому:

$$\frac{\pi}{2} < x - l\pi < \pi, \text{ т.-е. } \operatorname{tang}(x - l\pi) < 0,$$

и основное равенство даетъ:

$$\operatorname{tang} x < 0,$$

что и требовалось доказать.

Отмѣтимъ частный случай:

Тангенсъ положительный въ областяхъ: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ *и отрицательный въ областяхъ:* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Доказанная теорема говоритъ, что, *при непрерывномъ возрастаніи аргумента, значенія, принимаемыя тангенсомъ, мѣняютъ знакъ* **только** *при переходѣ аргумента черезъ какой ни есть корень* $\sin x$ *и черезъ какой ни есть корень* $\cos x$, *причемъ становятся положительными при переходѣ аргумента черезъ корень синуса и отрицательными — черезъ корень косинуса.* При убываніи аргумента будутъ обратныя явленія.

212. Замѣчаніе. — Замѣтимъ, что корни синуса суть корни тангенса, но корни косинуса не суть корни тангенса; слѣдовательно, опять (**210**) имѣемъ примѣръ того, что значенія функціи могутъ мѣнять знаки при переходѣ аргумента черезъ число, не представляющее корня функціи. Увидимъ (**219, 1°**), однако, что корни косинуса имѣютъ для тангенса особое значеніе.

213. Котангенсъ. — Такъ какъ, согласно опредѣленію,

$$\operatorname{tang} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1,$$

то тангенсъ и котангенсъ, для одного и того же значенія аргумента, совмѣстно положительны и совмѣстно отрицательны, а потому предъидущая теорема имѣетъ мѣсто и для $\operatorname{cotg} x$.

214. Замѣчаніе. — Замѣтимъ только, что хотя при переходѣ аргумента черезъ корни синуса значенія котангенса и мѣняютъ знаки, но эти корни не суть корни котангенса, хотя и имѣютъ для него, какъ увидимъ (**219, 2°**), особое значеніе.

215. Таблица положительныхъ и отрицательныхъ значеній тригонометрическихъ функцій при всевозможныхъ значеніяхъ аргумента. — Всякое значеніе x аргумента можетъ быть представлено формулою:

$$x = 2k\pi + \alpha,$$

гдѣ α есть *положительное* число, заключенное въ области $(0, 2\pi)$, причемъ k есть цѣлое число, положительное или отрицательное, смотря по тому, есть ли значеніе x положительное или отрицательное.

Будемъ говорить, что число x принадлежитъ:

1°. *первому тригонометрическому квадранту,* если α лежитъ въ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

2°. *второму тригонометрическому квадранту,* если α лежитъ въ области $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$;

3°. *третьему тригонометрическому квадранту,* если α лежитъ въ области $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$;

4°. *четвертому тригонометрическому квадранту,* если α лежитъ въ области $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Принимая во вниманіе, что, на основаніи періодичности,

$$\sin x = \sin\alpha, \quad \cos x = \cos\alpha, \quad \operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\alpha, \quad \text{и т. д.,}$$

и вспомнивъ отмѣченные выше частные случаи доказанныхъ теоремъ: (**205**), (**208**) и (**211**), заключаемъ, что тригонометрическія функціи представляютъ положительныя числа:

1. *Синусъ и косекансъ для значеній аргумента, принадлежащихъ первому и второму тригонометрическимъ квадрантамъ.*

2. *Тангенсъ и котангенсъ для значеній аргумента, принадлежащихъ первому и третьему тригонометрическимъ квадрантамъ.*

3. *Косинусъ и секансъ для значеній аргумента, принадлежащихъ первому и четвертому тригонометрическимъ квадрантамъ.*

Это можно изобразить слѣдующею таблицею:

x	*первый тригонометрическій квадрантъ:* $2k\pi+\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.	*второй тригонометрическій квадрантъ:* $2k\pi+\alpha$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$.	*третій тригонометрическій квадрантъ:* $2k\pi+\alpha$, $\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{3\pi}{2}$.	*четвертый тригонометрическій квадрантъ:* $2k\pi+\alpha$, $\frac{3\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.
sin	*положительный.*	*положительный.*	отрицательный.	отрицательный.
cos	*положительный.*	отрицательный.	отрицательный.	*положительный.*
tg	*положительный.*	отрицательный.	*положительный.*	отрицательный.
cotg	*положительный.*	отрицательный.	*положительный.*	отрицательный.
sec	*положительный.*	отрицательный.	отрицательный.	*положительный.*
cosec	*положительный*	*положительный.*	отрицательный.	отрицательный.

Примѣры. — 1°. $\cos\frac{133\pi}{10}$ есть отрицательное число, ибо

$$\frac{133\pi}{10} = 2\pi \cdot 6 + \frac{13}{10}\pi$$

принадлежитъ третьему квадранту, такъ какъ $\alpha = \frac{13}{10}\pi$ лежитъ въ области $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

2°. $\operatorname{cosec}\left(-\frac{64}{7}\pi\right)$ есть положительное число, ибо

$$-\frac{64\pi}{7} = 2\pi \cdot -5 + \frac{6\pi}{7}$$

принадлежитъ второму квадранту, такъ какъ $\alpha = \frac{6\pi}{7}$ лежитъ въ области $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

§ V. Полюсы тригонометрическихъ функцій.

216. Опредѣленіе. — *Число a называется* **полюсомъ** *функціи $f(x)$, если, при стремленіи перемѣннаго положительнаго числа α къ нулю, модуль перемѣннаго числа $f(a \pm \alpha)$, представляющаго значеніе функціи $f(x)$ при $x = a \pm \alpha$, безгранично возрастаетъ* [1]).

Если, при этомъ, само перемѣнное число $f(a \pm \alpha)$ безгранично возрастаетъ, то говорятъ, что $f(a)$ есть *положительная безконечность*, и обозначаютъ:

$$f(a) = +\infty, \text{ или такъ: } f[\lim(a \pm \alpha)_{\alpha=0}] = +\infty.$$

Если же безгранично возрастаетъ $-f(a \pm \alpha)$, то говорятъ, что $f(a)$ есть *отрицательная безконечность*, и обозначаютъ:

$$f(a) = -\infty, \text{ или такъ: } f[\lim(a \pm \alpha)_{\alpha=0}] = -\infty.$$

[1]) Такою функціею будетъ, напр., дробь $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, гдѣ $\psi(a) = 0$, причемъ $\varphi(a)$ не $= 0$.

Замѣтимъ, что функція $f(x)$ можетъ быть такова, что одинъ изъ модулей $|f(a+\alpha)|$, $|f(a-\alpha)|$ безгранично возрастаетъ, а другой стремится къ конечному предѣлу. Примѣромъ можетъ служить функція:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

Имѣемъ:

$$\lim f(0-\alpha)_{\alpha=0} = \lim[e^{-\frac{1}{\alpha}}]_{\alpha=0} = 0, \quad \lim f(0+\alpha)_{\alpha=0} = \lim(e^{\frac{1}{\alpha}})_{\alpha=0} = +\infty.$$

Если же безгранично возрастаетъ только модуль перемѣннаго числа $f(a \pm \alpha)$, то будемъ означать это такимъ образомъ:

$$f(a) = \pm \infty .$$

Примѣры. — 1°. Положимъ, что $f(x) = \frac{x-2}{(x-5)^3}$. Покажемъ, что корень знаменателя, т.-е. число 5, есть полюсъ функціи $f(x)$. И въ самомъ дѣлѣ,

$$f(5 \pm \alpha) = \frac{3 \pm \alpha}{\pm \alpha^3};$$

здѣсь, очевидно, возрастаетъ, при стремленіи α къ нулю, только $|f(a \pm \alpha)|$, ибо $f(a-\alpha)$ и $-f(a+\alpha)$ не возрастаютъ безгранично.

Итакъ, слѣдовательно,

$$f(5) = \pm \infty .$$

Равенство это равносильно таковымъ:

$$f[\lim(5+\alpha)_{\alpha=0}] = +\infty, \quad f[\lim(5-\alpha)_{\alpha=0}] = -\infty .$$

2. Положимъ, что $f(x) = \frac{x-7}{(x-2)^2}$. Покажемъ, что корень знаменателя, т.-е. число 2, есть полюсъ функціи $f(x)$.

И въ самомъ дѣлѣ,

$$f(2 \pm \alpha) = \frac{-5 \pm \alpha}{\alpha^2}.$$

Здѣсь, очевидно, безгранично возрастаетъ $-f(2 \pm \alpha)$; слѣдовательно

$$f(2) = -\infty .$$

Равенство это равносильно таковому:

$$f[\lim(2 \pm \alpha)_{\alpha=0}] = -\infty .$$

3°. Положимъ, что $f(x) = \frac{x+7}{(x+5)^2}$. Покажемъ, что корень знаменателя, т.-е. число (-5), есть полюсъ функціи $f(x)$.

И въ самомъ дѣлѣ,

$$f(-5 \pm \alpha) = \frac{2 \pm \alpha}{\alpha^2}.$$

Здѣсь, очевидно, безгранично возрастаетъ $f(-5 \pm \alpha)$; слѣдовательно,

$$f(-5) = +\infty ,$$

или

$$f[\lim(-5 \pm \alpha)_{\alpha=0}] = +\infty.$$

217. Замѣчаніе. Если a есть такой полюсъ, при которомъ

$$f(a) = \pm\infty,$$

то при возрастаніи или убываніи аргумента между двумя границами, внутри коихъ лежитъ этотъ полюсъ, и при переходѣ аргумента черезъ этотъ полюсъ функція мѣняетъ знакъ. Говорятъ, что она мѣняетъ этотъ знакъ, претерпѣвая **разрывъ**.

Въ примѣрѣ 1° $f(x)$, при возрастаніи аргумента и при переходѣ его черезъ полюсъ 5, изъ отрицательнаго числа, разрывомъ, становится числомъ положительнымъ.

218. Полюсы синуса и косинуса. — Такъ какъ модули синуса и косинуса не превышаютъ, ни при какихъ значеніяхъ аргумента, числа 1, то, слѣдовательно, **синусъ и косинусъ не имѣютъ полюсовъ.**

219. Полюсы тангенса и котангенса. — **1°. Полюсы тангенса суть числа: $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k произвольное цѣлое число, т.-е. суть всѣ корни косинуса.**

И въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію имѣемъ:

$$\tang x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

откуда

$$\tang(a \pm \alpha) = \frac{\sin(a \pm \alpha)}{\cos(a \pm \alpha)},$$

гдѣ a означаетъ любой корень $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ косинуса.

Если α стремится къ нулю, то $|\cos(a \pm \alpha)|$ безгранично убываетъ, ибо a есть корень косинуса, причемъ $|\sin(a \pm \alpha)|$ не убываетъ безгранично, ибо a не есть корень синуса. Слѣдовательно, $|\tg(a \pm \alpha)|$ безгранично возрастаетъ. Итакъ, числа a суть полюсы тангенса, и другихъ полюсовъ тангенсъ не имѣетъ, ибо при значеніяхъ аргумента, отличныхъ отъ a, **знаменатель — косинусъ** неравенъ нулю. Спрашивается, возрастаетъ ли безгранично одно изъ двухъ чиселъ: $\tg(a \pm \alpha)$ или $-\tang(a \pm \alpha)$? Легко видѣть, что ни одно изъ нихъ безгранично не возрастаетъ, ибо, *при достаточно маломъ* α,

$$\tang(a - \alpha) > 0, \quad \text{т.-е.} \quad -\tang(a - \alpha) < 0,$$

такъ какъ $a-\alpha$ заключено между $k\pi$ и $(2k+1)\frac{\pi}{2}=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$, и

$$\operatorname{tang}(a+\alpha)<0,$$

такъ какъ $a+\alpha$ заключено между $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ и $(k+1)\pi$.

Итакъ, слѣдовательно,

$$\operatorname{tang} a=\pm\infty.$$

Равенство это равносильно двумъ:

$$\operatorname{tang}[\lim(a-\alpha)_{\alpha=0}]=+\infty, \qquad \operatorname{tang}[\lim(a+\alpha)_{\alpha=0}]=-\infty;$$

т.-е. *при возрастаніи аргумента и при переходѣ его черезъ какой ни есть корень косинуса* **тангенсъ** *переходитъ, разрывомъ, изъ положительнаго числа въ отрицательное.*

Въ частности будемъ имѣть:

$$\operatorname{tang}\left[\lim\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)_{\alpha=0}\right]=+\infty, \quad \operatorname{tang}\left[\lim\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)_{\alpha=0}\right]=-\infty.$$

2°. Полюсы котангенса суть числа: $k\pi$, гдѣ k произвольное цѣлое число, т.-е суть всѣ корни синуса.

И въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію имѣемъ:

$$\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x},$$

откуда

$$\operatorname{cotg}(a\pm\alpha)=\frac{\cos(a\pm\alpha)}{\sin(a\pm\alpha)},$$

гдѣ a означаетъ какой ни есть корень $k\pi$, принадлежащій *синусу*.

Если α стремится къ нулю, то $|\sin(a\pm\alpha)|$ безгранично убываетъ, ибо a есть корень синуса, причемъ $|\cos(a\pm\alpha)|$ не убываетъ безгранично, ибо a не есть корень косинуса. Слѣдовательно, $|\operatorname{cotg}(a\pm\alpha)|$ безгранично возрастаетъ. Итакъ, числа a суть полюсы котангенса, и другихъ полюсовъ котангенсъ не имѣетъ, ибо при значеніяхъ аргумента, отличныхъ отъ a, знаменатель—синусъ неравенъ нулю. Спрашивается, возрастаетъ ли безгранично одно изъ двухъ чиселъ: $\operatorname{cotg}(a\pm\alpha)$ или $-\operatorname{cotg}(a\pm\alpha)$? Легко видѣть, что ни одно изъ нихъ безгранично не возрастаетъ, ибо, *при достаточно маломъ* α,

$$\operatorname{cotg}(a-\alpha)<0,$$

такъ какъ $a - \alpha$ заключено между $\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi$ и $k\pi$, и

$$\operatorname{cotg}(a + \alpha) > 0, \quad \text{т.-е.} \quad -\operatorname{cotg}(a + \alpha) < 0,$$

такъ какъ $a + \alpha$ заключено между $k\pi$ и $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$.

Итакъ, слѣдовательно,

$$\operatorname{cotg} a = \pm \infty.$$

Равенство это равносильно двумъ:

$$\operatorname{cotg}[\lim(a - \alpha)_{\alpha = 0}] = -\infty, \qquad \operatorname{cotg}[\lim(a + \alpha)_{\alpha = 0}] = +\infty,$$

т.-е. *при возрастаніи аргумента и при переходѣ его черезъ какой ни есть корень* синуса котангенсъ *переходитъ, разрывомъ, изъ отрицательнаго числа въ положительное.*

Въ частности будемъ имѣть.

$$\operatorname{cotg}[\lim(\pi - \alpha)_{\alpha = 0}] = -\infty, \qquad \operatorname{cotg}[\lim(0 + \alpha)_{\alpha = 0}] = +\infty.$$

220. Полюсы секанса и косеканса. — **1°. Полюсы секанса суть числа: $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k произвольное цѣлое число, т.-е суть всѣ корни косинуса.**

И въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію имѣемъ:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

откуда

$$\sec(a \pm \alpha) = \frac{1}{\cos(a \pm \alpha)},$$

гдѣ a означаетъ какой ни есть корень $\cos x$.

Если α стремится къ нулю, то $|\cos(a \pm \alpha)|$ безгранично убываетъ; слѣдовательно, $|\sec(a \pm \alpha)|$ безгранично возрастаетъ. Итакъ, числа a суть полюсы секанса, и другихъ полюсовъ секансъ не имѣетъ, ибо при значеніяхъ аргумента, отличныхъ отъ a, знаменатель—косинусъ неравенъ нулю.

Посмотримъ, возрастаетъ ли безгранично одно изъ чиселъ: $\sec(a \pm \alpha)$ или $-\sec(a \pm \alpha)$? Покажемъ, что ни одно изъ нихъ не возрастаетъ безгранично.

Во-первыхъ, положимъ, что корень a есть корень вида $(2q + 1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ q четное, или, что то́ же, вида $(2k + 3)\frac{\pi}{2}$, гдѣ $k = q - 1$ = не-

четное число. Тогда: 1) $\cos(a - \alpha)$ и, вмѣстѣ съ нимъ, $\sec(a - \alpha)$ положительныя числа, такъ что:

$$\sec(a - \alpha) > 0,$$

ибо $a - \alpha$, при достаточно маломъ α, лежитъ между корнями: $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ и $(2k+3)\frac{\pi}{3}$, гдѣ k нечетное число, и 2) $\cos(a+\alpha)$ и, вмѣстѣ съ нимъ, $\sec(a+\alpha)$ отрицательныя числа, такъ что

$$\sec(a + \alpha) < 0,$$

ибо $a + \alpha$ лежитъ, при достаточно маломъ α, между корнями: $(2q+1)\frac{\pi}{2}$ и $(2q+3)\frac{\pi}{3}$, гдѣ q четное число.

Итакъ, если

$$a = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{гдѣ } k \text{ четное,}$$

то

$$\sec a = \pm\infty.$$

Равенство это равносильно двумъ:

$$\sec[\lim(a - \alpha)_{\alpha=0}] = +\infty, \qquad \sec[\lim(a + \alpha)_{\alpha=0}] = -\infty.$$

Во-вторыхъ, положимъ, что a есть корень $(2q+1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ q нечетное. Изслѣдованіе, подобное предыдущему, покажетъ, что

$$\sec a = \mp\infty,$$

или

$$\sec[\lim(a - \alpha)_{\alpha=0}] = -\infty, \qquad \sec[\lim(a + \alpha)_{\alpha=0}] = +\infty.$$

Итакъ, *при возрастаніи аргумента и при переходѣ его черезъ корень* $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ *косинуса* **секансъ** *переходитъ, разрывомъ, изъ положительнаго числа въ отрицательное, или наоборотъ, смотря по тому, будетъ ли* k *четное или нечетное* **(210)**.

Въ частности будемъ имѣть:

$$\sec\left[\lim\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)_{\alpha=0}\right] = +\infty. \qquad \sec\left[\lim\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)_{\alpha=0}\right] = +\infty.$$

2°. Примѣняя къ **косекансу** тѣ же разсужденія, какія были сдѣланы относительно секанса, получимъ: **Полюсы косеканса суть числа:** $k\pi$, **гдѣ** k **произвольное цѣлое, т.-е. суть всѣ корни синуса**, причемъ

$$\operatorname{cosec}(a) = \mp\infty, \text{ если } a = k\pi, \text{ гдѣ } k \text{ четное,}$$

и

$$\operatorname{cosec}(a) = \pm\infty, \text{ если } a = k\pi, \text{ гдѣ } k \text{ нечетное,}$$

или

$$\operatorname{cosec}[\lim(a-\alpha)_{\alpha=0}] = -\infty \text{ и } \operatorname{cosec}[\lim(a+\alpha)_{\alpha=0}] = +\infty, \text{ если } k \text{ четное,}$$

и

$$\operatorname{cosec}[\lim(a-\alpha)_{\alpha=0}] = +\infty \text{ и } \operatorname{cosec}[\lim(a+\alpha)_{\alpha=0}] = -\infty, \text{ если } k \text{ нечетное,}$$

т.-е. *при возрастаніи аргумента и при переходѣ его черезъ корень* **синуса** $k\pi$ **косекансъ** *переходитъ, разрывомъ, изъ отрицательнаго числа въ положительное, или наоборотъ, смотря по тому, будетъ ли* k *четное или нечетное.*

Въ частности будемъ имѣть:

$$\operatorname{cosec}[\lim(0-\alpha)_{\alpha=0}] = -\infty, \qquad \operatorname{cosec}[\lim(0+\alpha)_{\alpha=0}] = +\infty.$$

§ VI. Теоремы, относящіяся къ замѣненію аргумента.

221. Теорема I.—*Для аргументовъ:* x *и* $-x$, *сумма соотвѣтствующихъ значеній коихъ равна нулю, косинусы равны; синусы и тангенсы, соотвѣтственно, равны по модулю и противоположны по знаку,* т.-е.

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \operatorname{tang}(-x) = -\operatorname{tang} x. \qquad [6]$$

Равенства эти были доказаны для значеній x, принадлежащихъ области $(-\pi, +\pi)$ **(189, C)**.

Покажемъ теперь, что они справедливы для всевозможныхъ значеній x.

Возьмемъ, для сей цѣли, **основныя (191)** равенства:

$$\sin x = (-1)^l \sin(x - l\pi), \quad \cos x = (-1)^l \cos(x - l\pi),$$

гдѣ l есть цѣлое число, небольшее числа $\frac{x}{\pi}$ и ближайшее къ нему,

и гдѣ, слѣдовательно, число $(x - l\pi)$ принадлежитъ области $(0, \pi)$. Равенства эти установлены для всевозможныхъ значеній аргумента.

Измѣнивъ въ нихъ x въ $-x$ и назвавъ буквою l_1 число, небольшее числа $\left(-\frac{x}{\pi}\right)$ и ближайшее къ нему, получимъ:

$$\sin(-x) = (-1)^{l_1}\sin(-x - l_1\pi), \quad \cos(-x) = (-1)^{l_1}\cos(-x - l_1\pi).$$

Принявъ во вниманіе, что

$$l_1 = -l - 1 \ ^{1)},$$

найдемъ:

$$\sin(-x) = -(-1)^l\sin[\pi - (x - l\pi)],$$
$$\cos(-x) = -(-1)^l\cos[\pi - (x - l\pi)].$$

Но число $(x - l\pi)$ заключено между 0 и π, а потому:

$$\sin[\pi - (x - l\pi)] = \sin(x - l\pi), \quad \cos[\pi - (x - l\pi)] = -\cos(x - l\pi),$$

и, слѣдовательно,

$$\sin(-x) = -(-1)^l\sin(x - l\pi), \quad \cos(-x) = (-1)^l\cos(x - l\pi).$$

Сравнивъ эти равенства съ основными равенствами, получимъ:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

для *всевозможныхъ* значеній x, что и хотѣли показать.

Для функціи $\tang x$, согласно ея опредѣленію, найдемъ:

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

222. Теорема 2.—*Для аргументовъ: $\pi + x$ и x, разность между соотвѣтствующими значеніями коихъ равна π, тангенсы равны; синусы и косинусы, соотвѣтственно, равны по модулю и противоположны по знаку,* т.-е.

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x. \qquad [7]$$

Эти формулы были доказаны для значеній x, принадлежащихъ области $(-\pi, +\pi)$ (**190, A'**).

---

1) [Если, напр., $\frac{x}{\pi} = 6\frac{1}{2}$, то $-\frac{x}{\pi} = -6\frac{1}{2}$; слѣдовательно, $l = 6$, $l_1 = -7$, т.-е. $l_1 = -l - 1$. Если, напр., $\frac{x}{\pi} = -6\frac{1}{2}$, то $-\frac{x}{\pi} = 6\frac{1}{2}$; слѣдовательно, $l = -7$, $l_1 = 6$, т.-е $l_1 = -l - 1$].

Покажемъ ихъ справедливость для всевозможныхъ значеній x. Обратимся, для сей цѣли, къ основнымъ равенствамъ:

$$\sin x = (-1)^l \sin(x - l\pi), \quad \cos x = (-1)^l \cos(x - l\pi),$$

гдѣ, какъ видѣли, l есть цѣлое число, небольшее числа $\frac{x}{\pi}$ и ближайшее къ нему.

Измѣнивъ въ нихъ x въ $\pi + x$, получимъ:

$$\sin(\pi + x) = (-1)^{l_1} \sin(\pi + x - l_1\pi),$$
$$\cos(\pi + x) = (-1)^{l_1} \cos(\pi + x - l_1\pi),$$

гдѣ число l_1 есть цѣлое число, небольшее числа $\frac{\pi + x}{\pi} = 1 + \frac{x}{\pi}$ и ближайшее къ нему.

Ясно, что

$$l_1 = l + 1,$$

и, слѣдовательно,

$$\sin(\pi + x) = -(-1)^l \sin(x - l\pi), \quad \cos(\pi + x) = -(-1)^l \cos(x - l\pi).$$

Сравнивъ эти равенства съ основными равенствами, найдемъ:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x,$$

что и хотѣли показать,

Для функціи $\operatorname{tang} x$, согласно ея опредѣленію, получимъ:

$$\operatorname{tang}(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tang} x$$

223. Слѣдствіе. — *Для аргументовъ: x и $(m\pi + x)$, гдѣ m произвольное цѣлое, тангенсы равны; синусы и косинусы, соотвѣтственно, равны при m четномъ и равны по модулю и противоположны по знаку при m нечетномъ,* т.-е.

$$\left.\begin{array}{c} \sin(m\pi + x) = (-1)^m \sin x, \quad \cos(m\pi + x) = (-1)^m \cos x, \\ \operatorname{tg}(m\pi + x) = \operatorname{tg} x. \end{array}\right\} \quad [7']$$

Въ справедливости этихъ равенствъ легко убѣждаемся, положивъ въ нихъ послѣдовательно $m = 2k$ и $m = 2k + 1$ и принявъ во вниманіе равенства [I] (190). Положивъ въ этихъ формулахъ: $x = 0$ и принявъ во вниманіе, что $\cos 0 = 1$, получимъ:

$$\cos m\pi = (-1)^m. \quad [7'']$$

Равенство:

$$\operatorname{tg}(m\pi + x) = \operatorname{tg} x$$

показываетъ, что тангенсъ числа не измѣнится, если къ этому числу прибавимъ, или отъ этого числа отнимемъ, число π, т.-е. показываетъ, что $\operatorname{tang} x$ *есть функція періодическая съ періодомъ, равнымъ числу* π (196). Увидимъ, что функціи $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cotg} x$ не имѣютъ положительнаго періода, меньшаго числа π.

224. Теорема 3. — *Для аргументовъ: $\pi - x$ и x, сумма соотвѣтствующихъ значеній коихъ равна числу π, синусы равны; косинусы и тангенсы, соотвѣтственно, равны по модулю и противоположны по знаку*, т.-е.

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x. \qquad [8]$$

Равенства эти были установлены для значеній x, принадлежащихъ области $(-\pi, +\pi)$ (190, A).

Покажемъ справедливость ихъ для всевозможныхъ x.

Измѣняя, для сей цѣли, въ равенствахъ [7] x въ $(-x)$ и принявъ во вниманіе равенства [6], получимъ:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) &= -\sin(-x) = -[-\sin x] = \sin x, \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(-x) = -[+\cos x] = -\cos x, \\ \operatorname{tg}(\pi - x) &= \operatorname{tg}(-x) = +[-\operatorname{tg} x] = -\operatorname{tg} x, \end{aligned}$$

что и хотѣли показать.

Подобнымъ же образомъ, измѣнивъ въ равенствѣ [7'] x въ $(-x)$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin(m\pi - x) = (-1)^{m+1} \sin x, \quad \cos(m\pi - x) = (-1)^m \cos x, \\ \operatorname{tang}(m\pi - x) = -\operatorname{tang} x. \end{aligned}\right\} \qquad [8']$$

225. Теорема 4. — *Для аргументовъ: $\frac{\pi}{2} - x$ и x, сумма соотвѣтствующихъ значеній коихъ равна числу $\frac{\pi}{2}$, синусъ, косинусъ и тангенсъ одного изъ нихъ равны, соотвѣтственно, косинусу, синусу и котангенсу другого*, т.-е.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x. \qquad [9]$$

Равенства эти были доказаны въ первой части этого курса (15) для значеній x, принадлежащихъ области $\left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$.

Докажемъ справедливость ихъ для всевозможныхъ значеній x.

Покажемъ *сперва* справедливость ихъ для значенiй x, принадлежащихъ области $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$.

Вспомнимъ, для сего, равенства:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x, \tag{1}$$

доказанныя въ первой части этого курса (16) для значенiй x, принадлежащихъ области $\left(0,\ +\frac{\pi}{2}\right)$.

Если x принадлежитъ области $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, то $(-x)$ принадлежитъ области $\left(0,\ +\frac{\pi}{2}\right)$ Написавъ равенства (1) для этихъ $(-x)$, получимъ:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(-x)=\cos x,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin(-x)=\sin x,$$

т.-е. получили равенства **[9]**.

Итакъ, равенства **[9]** доказаны для значенiй x, принадлежащихъ области $\left(-\frac{\pi}{2},\ +\frac{\pi}{2}\right)$.

Покажемъ теперь справедливость этихъ равенствъ для всевозможныхъ значенiй аргумента. Для сей цѣли возьмемъ основныя равенства:

$$\sin x=(-1)^l\sin(x-l\pi),\quad \cos x=(-1)^l\cos(x-l\pi).$$

Измѣнивъ здѣсь x въ $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, получимъ:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=(-1)^{l_1}\sin\left[\frac{\pi}{2}-(x+l_1\pi)\right],$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=(-1)^{l_1}\cos\left[\frac{\pi}{2}-(x+l_1\pi)\right],$$

гдѣ l_1 есть цѣлое число, небольшее числа $\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\pi}$ и ближайшее къ нему, такъ что

$$0\leqslant\frac{\pi}{2}-(x+l_1\pi)\leqslant\pi,\quad \text{откуда}\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant x+l_1\pi\leqslant+\frac{\pi}{2};$$

но тогда, какъ только что было доказано,

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}-(x+l_1\pi)\right]=\cos(x+l_1\pi),$$
$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-(x+l_1\pi)\right]=\sin(x+l_1\pi).$$

Слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=(-1)^{l_1}\cos(x+l_1\pi),\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=(-1)^{l_1}\sin(x+l_1\pi).\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Если l_1 есть четное число $2k$, то

$$\cos(x+l_1\pi)=\cos(x+2k\pi)=\cos x,$$
$$\sin(x+l_1\pi)=\sin(x+2k\pi)=\sin x.$$

Если l_1 есть нечетное число $2k+1$, то

$$\cos(x+l_1\pi)=\cos[x+(2k+1)\pi]=\cos(\pi+x)=-\cos x,$$
$$\sin(x+l_1\pi)=\sin[x+(2k+1)\pi]=\sin(\pi+x)=-\sin x.$$

Итакъ, и въ томъ, и въ другомъ случаяхъ, какъ показываютъ формулы (1), получимъ:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,$$

что и хотѣли показать.

Для функціи $\operatorname{tang}x$, согласно ея опредѣленію, найдемъ:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{cotg}x.$$

При помощи формулъ **[9]** и **[7']** легко получаемъ *обобщенныя* формулы **[9]**, и именно:

$$\left.\begin{aligned}\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=(-1)^k\cos x,\qquad \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=(-1)^k\sin x,\\ \operatorname{tang}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=\operatorname{cotg}x.\end{aligned}\right\}\ \mathbf{[9']}$$

Положивъ въ первой изъ нихъ $x=0$ и принявъ во вниманіе, что $\cos=1$, найдемъ:

$$\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]=(-1)^k. \qquad [9']$$

226. Слѣдствіе.—Измѣнивъ въ формулахъ [9] x въ $(-x)$ и принявъ во вниманіе равенства [6], найдемъ:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{cotg} x. \qquad [10]$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+x\right]&=(-1)^k\cos x,\\ \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+x\right]&=(-1)^{k-1}\sin x,\\ \operatorname{tang}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+x\right]&=-\operatorname{cotg} x.\end{aligned}\right\} \qquad [10']$$

227. Замѣчаніе. — На основаніи опредѣленія функцій: $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ можемъ, очевидно, замѣнить въ предыдущихъ формулахъ функціональные знаки: *sin, cos* и *tang* соотвѣтственно знаками: *cosec, sec* и *cotg* и, послѣ этой замѣны, получимъ:

$$\operatorname{cosec}(-x)=-\operatorname{cosec} x,\quad \sec(-x)=\sec x,\quad \operatorname{cotg}(-x)=-\operatorname{cotg} x.$$
$$\operatorname{cosec}(\pi+x)=-\operatorname{cosec} x,\quad \sec(\pi+x)=-\sec x,\quad \operatorname{cotg}(\pi+x)=\operatorname{cotg} x.$$
$$\operatorname{cosec}(\pi-x)=\operatorname{cosec} x,\quad \sec(\pi-x)=-\sec x,\quad \operatorname{cotg}(\pi-x)=-\operatorname{cotg} x.$$
$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sec x,\quad \sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cosec} x,\quad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg} x.$$

§ VII. Функція $\frac{\sin x}{x}$.

228. Опредѣленіе. — Выраженіе $\frac{\sin x}{x}$ представляетъ, для всякаго значенія аргумента x, *отличнаго отъ нуля*, функцію этого аргумента, ибо выраженіе это, для всякаго значенія x, отличнаго отъ нуля, имѣетъ *одно* опредѣленное значеніе. Но при $x=0$ выраженіе теряетъ смыслъ. Принято, однако, считать *значеніемъ этого выраженія при* $x=0$ *тотъ предѣлъ, къ которому стремится это выраженіе, когда аргументъ* x *принимаетъ значенія, безгранично приближающіяся къ нулю.*

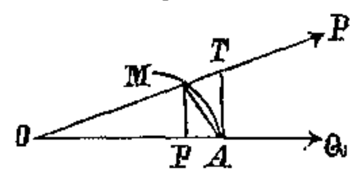
Для того, чтобы соглашеніе это имѣло смыслъ, должно показать, что предѣлъ этотъ существуетъ и не зависитъ отъ того закона, по которому значенія аргумента приближаются къ нулю.

Покажемъ, что это имѣетъ мѣсто.

229. Лемма. — *Если число* α *принадлежитъ области* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *то оно больше своего синуса и меньше своего тангенса.*

Положимъ, что *острый* уголъ, которому соотвѣтствуетъ тригонометрическій уголъ, равный числу α, есть уголъ POQ (черт. 32).

Черт. 32.



Описавъ изъ его вершины O, произвольнымъ радіусомъ OA, дугу AM и проведя касательную AT къ дугѣ AM въ точкѣ A, получимъ:

$$\sin\alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{MP}{OA}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{AT}{OA}, \quad \alpha = \frac{\operatorname{arc} AM}{OA}.$$

Сравнивъ площади треугольниковъ OAM и OAT съ площадью кругового сектора OAM, получимъ:

$$\text{пл. треуг. } OAM < \text{пл. сек. } OAM < \text{пл. тр. } OAT.$$

Замѣнивъ площади ихъ выраженіями, найдемъ:

$$\frac{1}{2}\, OA\,.\,MP < \frac{1}{2}\, OA\,.\operatorname{arc} AM < \frac{1}{2}\, OA\,.\,AT.$$

Раздѣливъ всѣ части этихъ неравенствъ на $\frac{1}{2}\,\overline{OA}^2$, получимъ:

$$\frac{MP}{OA} < \frac{\operatorname{arc} AM}{OA} < \frac{AT}{OA},$$

или, что то же,

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tang}\alpha,$$

что и требовалось доказать.

230. Замѣчаніе.—Если α заключено въ области $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$, то $(-\alpha)$ заключено въ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; но тогда, по доказанному сейчасъ,

$$\sin(-\alpha) < -\alpha < \operatorname{tg}(-\alpha),$$

или

$$-\sin\alpha < -\alpha < -\operatorname{tang}\alpha,$$

откуда

$$\sin\alpha > \alpha > \operatorname{tang}\alpha.$$

Принимая во вниманіе, что числа: $\sin\alpha$, α и $\operatorname{tang}\alpha$ суть числа отрицательныя, и принимая во вниманіе, что отрицательное число тѣмъ болѣе, чѣмъ его модуль менѣе, можемъ предъидущія неравенства написать въ видѣ:

$$|\sin\alpha| < |\alpha| < |\operatorname{tang}\alpha|.$$

Замѣтимъ, что въ этомъ же видѣ могутъ быть написаны неравенства и при положительномъ α.

Итакъ, *если α заключено между* $\left(-\frac{\pi}{2}\text{ и }+\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$|\sin\alpha|<|\alpha|<|\operatorname{tg}\alpha|.$$

231. Теорема. — *Если α есть безконечно малое число, т.-е. перемѣнное число, имѣющее предѣломъ нуль, то перемѣнное число $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ имѣетъ предѣломъ число 1.* Такъ какъ α имѣетъ предѣломъ нуль, то можемъ предположить, что значенія, принимаемыя α, принадлежатъ области $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, но тогда, какъ показываетъ предъидущая лемма,

$$|\sin\alpha|<|\alpha|<|\operatorname{tang}\alpha|,$$

откуда

$$\frac{|\sin\alpha|}{|\sin\alpha|}>\frac{|\sin\alpha|}{|\alpha|}>\frac{|\sin\alpha|}{|\operatorname{tg}\alpha|}, \text{ т.-е. } 1>\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha,$$

ибо $\sin\alpha$, α и $\operatorname{tang}\alpha$ совмѣстно положительные и совмѣстно отрицательные.

Неравенства эти даютъ:

$$0<1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1-\cos\alpha=(48)\ 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

но, по доказанной леммѣ,

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|<\left|\frac{\alpha}{2}\right|, \text{ или } \sin^2\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha^2}{4};$$

слѣдовательно,

$$0<1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}<\frac{\alpha^2}{2}, \text{ т.-е. } \left|1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right|<\frac{\alpha^2}{2}.$$

Такъ какъ $\left|\frac{\alpha^2}{2}\right|$ безгранично убываетъ, ибо, по условію, $|\alpha|$ безгранично убываетъ, то неравенство говоритъ, что и модуль разности между *постояннымъ* числомъ 1 и *перемѣннымъ* числомъ $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ безгранично убываетъ, т.-е. постоянное число 1 есть предѣлъ перемѣннаго числа $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ при безграничномъ убываніи α, что и требовалось доказать.

Теорема эта выражается такимъ равенствомъ:

$$lim\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)_{\alpha=0}=1. \qquad [11]$$

232. Слѣдствія. — Предъидущая теорема даетъ слѣдующія равенства:

$$lim\left(\frac{\sin\beta^0}{\beta}\right)_{\beta=0}=\frac{\pi}{180}, \qquad lim\left(\frac{\sin\gamma'}{\gamma}\right)_{\gamma=0}=\frac{\pi}{180.60},$$

$$lim\left(\frac{\sin\delta''}{\delta}\right)_{\delta=0}=\frac{\pi}{180.60.60}.$$

Докажемъ первое изъ нихъ (остальныя два докажутся подобнымъ же образомъ). Выразивъ уголъ β^0 въ радіанахъ, получимъ соотвѣтствующій тригонометрическій уголъ, равный числу $\pi\cdot\frac{\beta}{180}$. Слѣдовательно,

$$\frac{\sin(\beta^0)}{\beta}=\frac{\sin\left(\pi\cdot\frac{\beta}{180}\right)}{\beta}=\frac{\sin\left(\pi\cdot\frac{\beta}{180}\right)}{\pi\cdot\frac{\beta}{180}}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\pi}{180},$$

гдѣ буквою α означено число $\pi\cdot\frac{\beta}{180}$. Принявъ во вниманіе, что 1) при стремленіи β къ нулю число α также стремится къ нулю, 2) отношеніе $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ имѣетъ, на основаніи доказанной теоремы, предѣлъ, равный 1, и 3) число $\frac{\pi}{180}$ есть число постоянное, получимъ:

$$lim\left[\frac{\sin\beta^0}{\beta}\right]_{\beta=0}=\frac{\pi}{180},$$

что и требовалось доказать.

§ VIII. Таблица формулъ, содержащихся въ этой главѣ.

233. Итакъ, въ этой главѣ содержатся слѣдующія формулы, которыя должно помнить наизусть.

1. Алгебраическія соотношенія между тригонометрическими функціями:

$$\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 x=1, & [3] \\ \tang x=\frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cotg x=\frac{\cos x}{\sin x}, & [4] \\ \sec x=\frac{1}{\cos x}, \qquad \cosec x-\frac{1}{\sin x}. & [5] \end{cases}$$

2. Формулы, служащія для приведенія значеній аргумента въ область $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{cases} \sin x = (-1)^l \sin(x - l\pi), & \cos x = (-1)^l \cos(x - l\pi), \\ \operatorname{tg} x = \operatorname{tang}(x - l\pi), & \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x - l\pi), \\ \sec x = (-1)^l \sec(x - l\pi), & \operatorname{cosec} x = (-1)^l \operatorname{cosec}(x - l\pi), \end{cases} \quad [2]$$

гдѣ l есть цѣлое число, ближайшее къ числу $\frac{x}{\pi}$ и не превышающее его.

3 Формулы, выражающія періодичность тригонометрическихъ функцій:

$$\begin{cases} \sin(x + 2k\pi) = \sin x, & \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \\ \operatorname{tang}(x + 2k\pi) = \operatorname{tang} x, & \operatorname{cotg}(x + 2k\pi) = \operatorname{cotg} x, \\ \sec(x + 2k\pi) = \sec x, & \operatorname{cosec}(x + 2k\pi) = \operatorname{cosec} x, \end{cases} \quad [1]$$

гдѣ k произвольное цѣлое.

4. Формулы, замѣняющія аргументъ $(-x)$ аргументомъ x:

$$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x, & \cos(-x) = \cos x, & \operatorname{tang}(-x) = -\operatorname{tang} x, \\ \operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x, & \sec(-x) = \sec x, & \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x. \end{cases} \quad [6]$$

5. Формулы, замѣняющія аргументъ $(m\pi - x)$ аргументомъ x:

$$\begin{cases} \sin(m\pi - x) = (-1)^{m-1} \sin x, & \cos(m\pi - x) = (-1)^m \cos x, & \operatorname{tg}(m\pi - x) = -\operatorname{tang} x, \\ \operatorname{cosec}(m\pi - x) = (-1)^{m-1} \operatorname{cosec} x, & \sec(m\pi - x) = (-1)^m \sec x, & \operatorname{cotg}(m\pi - x) = -\operatorname{cotg} x, \end{cases} \quad [8']$$

гдѣ m произвольное цѣлое.

Въ частности, при $m = 1$,

$$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x, & \cos(\pi - x) = -\cos x, & \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}(\pi - x) = \operatorname{cosec} x, & \sec(\pi - x) = -\sec x, & \operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg} x. \end{cases} \quad [8]$$

6. Формулы, замѣняющія аргументъ $(m\pi + x)$ аргументомъ x.

$$\begin{cases} \sin(m\pi + x) = (-1)^m \sin x, & \cos(m\pi + x) = (-1)^m \cos x, & \operatorname{tg}(m\pi + x) = \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}(m\pi + x) = (-1)^m \operatorname{cosec} x, & \sec(m\pi + x) = (-1)^m \sec x, & \operatorname{cotg}(m\pi + x) = \operatorname{cotg} x, \\ \cos(m\pi) = (-1)^m, & \sec(m\pi) = (-1)^m. & \end{cases} \quad [7']$$

гдѣ m произвольное цѣлое.

Въ частности, при $m = 1$,

$$\begin{cases} \sin(\pi + x) = -\sin x, & \cos(\pi + x) = -\cos x, & \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}(\pi + x) = -\operatorname{cosec} x, & \sec(\pi + x) = -\sec x, & \operatorname{cotg}(\pi + x) = \operatorname{cotg} x. \end{cases} \quad [7]$$

7. Формулы, замѣняющія аргументъ $(2k+1)\frac{\pi}{2}-x$ аргументомъ x.

$$\left\{\begin{aligned}
&\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=(-1)^k\cos x,\quad \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=(-1)^k\sin x,\\
&\operatorname{tang}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=\operatorname{cotg}x,\\
&\operatorname{cosec}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=(-1)^k\sec x,\quad \sec\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=(-1)^k\operatorname{cosec}x,\\
&\operatorname{cotg}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=\operatorname{tang}x,\\
&\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]=(-1)^k,\quad \operatorname{cosec}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]=(-1)^k.
\end{aligned}\right. \qquad [9']$$

Въ частности, при $k=0$:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cotg}x,\\
&\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sec x,\quad \sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cosec}x,\quad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}x,
\end{aligned}\right. \qquad [9]$$

и при $k=1$:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cotg}x,\\
&\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sec x,\quad \sec\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{cosec}x,\quad \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}x.
\end{aligned}\right.$$

8. Формулы, замѣняющія аргументъ $(2k+1)\frac{\pi}{2}+x$ аргументомъ x.

$$\left\{\begin{aligned}
&\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+x\right]=(-1)^k\cos x,\quad \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+x\right]=(-1)^{k+1}\sin x,\\
&\operatorname{tang}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+x\right]=-\operatorname{cotg}x,\\
&\operatorname{cosec}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+x\right]=(-1)^k\sec x,\quad \sec\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+x\right]=(-1)^{k-1}\operatorname{cosec}x,\\
&\operatorname{cotg}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+x\right]=-\operatorname{tang}x.
\end{aligned}\right. \qquad [10']$$

Въ частности, при $k=0$:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x,\quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{cotg}x,\\
&\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sec x,\quad \sec\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{cosec}x,\quad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{tang}x,
\end{aligned}\right. \qquad [10]$$

и при $k=1$:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x,\quad \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{cotg}x,\\
&\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\sec x,\quad \sec\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\operatorname{cosec}x,\quad \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{tg}x.
\end{aligned}\right.$$

9. Корни тригонометрическихъ функцій.

$$\left\{\begin{array}{cc} \sin(k\pi) = 0, & \operatorname{tang}(k\pi) = 0, \\ \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0, & \operatorname{cotg}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0, \\ \multicolumn{2}{c}{\sec x \text{ и } \operatorname{cosec} x \text{ нулей не имѣютъ.}} \end{array}\right.$$

10. Полюсы тригонометрическихъ функцій.

$$\left\{\begin{array}{cc} \operatorname{tang}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = \pm\infty, & \sec\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = \pm\infty, \\ \operatorname{cotg}(k\pi) = \mp\infty, & \operatorname{cosec}(k\pi) = \mp\infty, \\ \multicolumn{2}{c}{\sin x \text{ и } \cos x \text{ полюсовъ не имѣютъ.}} \end{array}\right.$$

11. Значенія аргумента, при коихъ значенія тригонометрическихъ функцій суть положительныя числа.

Синусъ и *косекансъ* положительные въ *первомъ* и *второмъ* тригонометрическихъ квадрантахъ.

$$\left(x = 2k\pi + \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi\right).$$

Косинусъ и *секансъ* положительные въ *первомъ* и *четвертомъ* тригонометрическихъ квадрантахъ.

$$\left(x = 2k\pi + \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi\right).$$

Тангенсъ и котангенсъ положительные въ *первомъ* и *третьемъ* тригонометрическихъ квадрантахъ.

$$\left(x = 2k\pi + \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{3\pi}{2}\right).$$

12. Предѣлъ отношенія синуса безконечно малаго числа къ этому числу.

1°. $|\sin\alpha| < |\alpha| < |\operatorname{tang}\alpha|$, если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$.

2°. $\lim\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)_{\alpha=0} = 1, \quad \lim\left(\frac{\sin\beta^0}{\beta}\right)_{\beta=0} = \frac{\pi}{180}$.

ГЛАВА III.

Теорема сложенія.

§ I. Теорема сложенія.

234. Синусъ и косинусъ суммы двухъ аргументовъ. —Теорема.—*Синусъ и косинусъ суммы двухъ аргументовъ x и y выражаются раціонально и цѣло въ синусахъ и косинусахъ слагаемыхъ, причемъ выраженія эти суть:*

$$\left.\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y. \end{aligned}\right\} \qquad [12]$$

Доказательство. 1°. Въ первой части этого курса были доказаны формулы:

$$\sin(A+B) = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B,$$
$$\cos(A+B) = \cos A . \cos B - \sin A . \sin B$$

для положительныхъ угловъ (дугъ) A и B, сумма коихъ не превышаетъ 2d (полуокружности), причемъ, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ угловъ (одна изъ дугъ), напр. B, не превышаетъ d (квадранта).

Выразивъ углы (дуги) A и B въ радіанахъ и означивъ полученныя числа соотвѣтственно буквами a и b, получимъ формулы [12] для значеній a и b, удовлетворяющихъ условіямъ:

$$0 \leqslant a \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant b \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad a+b \leqslant \pi.$$

Остается *обобщить* эти формулы для всевозможныхъ значеній a и b аргументовъ x и y.

2°. *Обобщимъ* сперва формулы для значеній a и b, удовлетворяющихъ условіямъ:

$$0 \leqslant a \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant b \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \text{но} \quad a+b \geqslant \pi.$$

Третье изъ этихъ условій, при существованіи второго, замѣняетъ первое условіе таковымъ:

$$\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \pi.$$

Представимъ a въ видѣ суммы: $a = \frac{\pi}{2} + a_1$, гдѣ a_1 удовлетворяетъ условію:

$$0 \leqslant a_1 \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ и, слѣдовательно, } a_1 + b \leqslant \pi,$$

а потому можемъ примѣнить формулы [12] къ значеніямъ a_1 и b и написать:

$$\sin(a_1 + b) = \sin a_1 \cos b + \cos a_1 \sin b,$$
$$\cos(a_1 + b) = \cos a_1 \cos b - \sin a_1 \sin b.$$

Замѣняя здѣсь a_1 разностью $\left(a - \frac{\pi}{2}\right)$ и принявъ во вниманіе, что

$$\sin(a_1 + b) = \sin\left[(a + b) - \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = -\cos(a + b),$$
$$\cos(a_1 + b) = \cos\left[(a + b) - \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \sin(a + b),$$
$$\sin a_1 = \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos a,$$
$$\cos a_1 = \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a,$$

получимъ:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \cdot \sin b,$$
$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \cdot \sin b,$$

т.-е. обобщили формулы [12] для разсматриваемыхъ значеній a и b.

3°. *Обобщимъ* эти формулы для значеній a и b, удовлетворяющихъ условіямъ:

$$\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \pi, \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant b \leqslant \pi.$$

Представимъ a и b въ видѣ разностей:

$$a = \pi - a_1, \qquad b = \pi - b_1,$$

гдѣ a_1 и b_1 удовлетворяютъ, очевидно, условіямъ:

$$0 \leqslant a_1 \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant b_1 \leqslant \frac{\pi}{2},$$

а потому можемъ примѣнить формулы [12] къ значеніямъ a_1 и b_1 и написать:

$$\sin(a_1 + b_1) = \sin a_1 \cos b_1 + \cos a_1 \sin b_1,$$
$$\cos(a_1 + b_1) = \cos a_1 \cos b_1 - \sin a_1 \sin b_1.$$

Замѣнивъ здѣсь a_1, b_1 и сумму $a_1 + b_1$ соотвѣтственно разностями: $(\pi - a)$, $(\pi - b)$, $2\pi - (a + b)$ и принявъ во вниманіе, что

$$\sin(a_1 + b_1) = -\sin(a + b), \quad \cos(a_1 + b_1) = \cos(a + b),$$
$$\sin a_1 = \sin a, \quad \cos a_1 = -\cos b, \quad \sin a_1 = \sin b, \quad \cos b_1 = -\cos b,$$

получимъ:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

т.-е. обобщили формулы [12] для разсматриваемыхъ значеній a и b.

Итакъ, слѣдовательно, формулы [12] доказаны для всевозможныхъ значеній a и b, удовлетворяющихъ условіямъ:

$$0 \leqslant a \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant b \leqslant \pi.$$

4°. Докажемъ теперь формулы [12] для всевозможныхъ значеній a и b. Каковы бы ни были a и b, ихъ можно представить въ видѣ:

$$a = k\pi + \alpha, \quad b = l\pi + \beta, \quad a + b = (k + l)\pi + (\alpha + \beta),$$

гдѣ k и l суть нѣкоторыя *цѣлыя* числа, положительныя или отрицательныя, причемъ α и β таковы:

$$0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi,$$

и, слѣдовательно, для нихъ формулы [12] справедливы, такъ что:

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \end{cases} \tag{1}$$

Но равенства [7'] даютъ:

$$\sin(\alpha + \beta) = (-1)^{k+l}\sin(a + b), \quad \cos(\alpha + \beta) = (-1)^{k+l}\cos(a + b),$$
$$\sin\alpha = (-1)^k \sin a \quad , \quad \cos\alpha = (-1)^k \cos a \quad ,$$
$$\sin\beta = (-1)^l \sin b \quad , \quad \cos\beta = (-1)^l \cos b \quad .$$

Внося эти значенія въ равенства (1), получимъ формулы **[12]** для всевозможныхъ значеній a и b.

Теорема доказана. Она въ высшей степени замѣчательна и носитъ названіе **теоремы сложенія.**

235. Синусъ и косинусъ разности аргументовъ. — Измѣнивъ, въ формулахъ **[12]**, y въ $(-y)$ и принявъ во вниманіе, что

$$\sin(-y) = -\sin y, \quad \cos(-y) = \cos y,$$

получимъ·

$$\left.\begin{aligned} \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y, \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y. \end{aligned}\right\} \qquad [13]$$

Формулы эти показываютъ, что *синусъ и косинусъ разности двухъ аргументовъ выражаются раціонально и цѣло въ синусахъ и косинусахъ уменьшаемаго и вычитаемаго.*

236. Тангенсъ суммы и разности аргументовъ. Формулы **[12]** и **[13]** могутъ быть представлены въ видѣ:

$$\left\{\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \cos x \cos y [\operatorname{tang} x \pm \operatorname{tang} y], \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y [1 \mp \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y], \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

гдѣ знаки въ правой и лѣвой частяхъ соотвѣтствуютъ.

Раздѣливъ эти равенства по частямъ, получимъ:

$$\operatorname{tang}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tang} x \pm \operatorname{tang} y}{1 \mp \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y}. \qquad [14]$$

Формула эта говоритъ, что *тангенсъ суммы (разности) двухъ аргументовъ выражается раціонально въ тангенсахъ слагаемыхъ (уменьшаемаго и вычитаемаго).*

237. Обобщеніе теоремы сложенія для произвольнаго числа слагаемыхъ. — *Обобщимъ теорему сложенія для произвольнаго числа слагаемыхъ, доказавъ слѣдующія формулы.*

$$\left\{\begin{aligned} \sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n) &= \cos x_1 \cdot \cos x_2 \ldots \cos x_{n-1} \cos x_n [S_1 - S_3 + S_5 - \ldots], \\ \cos(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n) &= \cos x_1 \cdot \cos x_2 \ldots \cos x_{n-1} \cos x_n [1 - S_2 + S_4 - \ldots], \\ \operatorname{tg}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n) &= \frac{S_1 - S_3 + S_5 - \ldots}{1 - S_2 + S_4 - \ldots}, \end{aligned}\right.$$

гдѣ S_r представляетъ *сумму* сочетаній [1]) r-го порядка, образованныхъ изъ чиселъ:

$$\operatorname{tg} x_1, \ \operatorname{tg} x_2, \ \ldots, \ \operatorname{tg} x_{n-1}, \ \operatorname{tg} x_n.$$

---

[1]) *Н. Бимбинъ* Алгебра. Изд. 4-е. Стр. 387.

Если докажемъ справедливость первыхъ двухъ формулъ, то тѣмъ самымъ докажемъ справедливость третьей, ибо она получается отъ раздѣленія первыхъ двухъ по частямъ.

Первыя двѣ формулы докажемъ способомъ, называемымъ *математическою индукціею,* который заключается въ слѣдующемъ:

1°. *Повѣряемъ* доказываемыя формулы непосредственно для наименьшаго n, т.-е. для $n=2$. Это повѣрено, ибо формулы (2) суть именно доказываемыя формулы для $n=2$.

2°. *Предполагаемъ,* что доказываемыя формулы справедливы для нѣкотораго n.

3°. *Доказываемъ,* что онѣ остаются справедливыми для числа слагаемыхъ, на единицу большаго, т.-е. доказываемъ равенства

$$(h)\begin{cases}\sin(x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1})=\cos x_1\cos x_2\ldots\cos x_n\cos x_{n+1}[S_1'-S_3'+S_5'-\ldots],\\ \cos(x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1})=\cos x_1\cos x_2\ldots\cos x_n\cos x_{n+1}[\,1-S_2'+S_4'-\ldots]\end{cases}$$

гдѣ S_r' есть сумма сочетаній r-го порядка изъ чиселъ:

$$\operatorname{tg}x_1,\quad \operatorname{tg}x_2,\quad \ldots,\quad \operatorname{tg}x_n,\quad \operatorname{tg}x_{n+1}.$$

И въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы сложенія получаемъ:

$$\sin(x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1})=\sin(x_1+x_2\ldots+x_n)\cos x_{n+1}+\cos(x_1+x_2+\ldots+x_n)\sin x_{n+1},$$
$$\cos(x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1})=\cos(x_1+x_2\ldots+x_n)\cos x_{n+1}-\sin(x_1+x_2+\ldots+x_n)\sin x_{n+1}.$$

Подставляя сюда, вмѣсто

$$\sin(x_1+x_2+\ldots+x_n)\quad\text{и}\quad\cos(x_1+x_2+\ldots+x_n),$$

правыя части формулъ, справедливость коихъ *предположили;* вынося произведеніе:

$$\cos x_1\cos x_2\ldots\cos x_n\cos x_{n+1}$$

за скобки и принимая во вниманіе, что

$$S_1+\operatorname{tg}x_{n+1}=S_1',\;\; S_2+S_1\operatorname{tg}x_{n+1}=S_2',\;\ldots,\;\; S_r+S_{r-1}\operatorname{tg}x_{n+1}=S_r',\;\ldots,$$

легко получимъ равенства (h).

4°. Доказавъ равенства (h), можемъ утверждать, что доказываемыя равенства справедливы для любого n, заключеннаго въ рядѣ:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ldots,$$

если онѣ справедливы для предыдущаго n; но онѣ справедливы для $n=2$; слѣдовательно, онѣ вообще справедливы.

238. Замѣчаніе.—Доказанныя формулы теряютъ смыслъ, если хотя одно изъ x есть *корень* функціи $\cos x$. Но если замѣнимъ тангенсы отношеніями синусовъ къ косинусамъ и выполнимъ означенныя умноженія, то всѣ знаменатели, а слѣдовательно и тѣ, которые обращаются въ нули, исчезнутъ.

§ II. Преобразованіе суммъ въ произведенія.

239. Преобразованіе произведеній синусовъ и косинусовъ въ суммы.—Напишемъ формулы, выражающія теорему сложенія:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y,$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

Формулы эти даютъ:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y, \quad (1)$$
$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\sin y\cos x, \quad (2)$$
$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y, \quad (3)$$
$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2\sin x\sin y. \quad (4)$$

Изъ этихъ равенствъ выводимъ слѣдующія, *преобразовывающія произведенія въ суммы:*

$$\left.\begin{aligned}\sin x\cos y &= \frac{1}{2}\Big[\sin(x+y)+\sin(x-y)\Big],\\ \sin y\cos x &= \frac{1}{2}\Big[\sin(x+y)-\sin(x-y)\Big],\\ \cos x\cos y &= \frac{1}{2}\Big[\cos(x+y)+\cos(x-y)\Big],\\ \sin x\sin y &= \frac{1}{2}\Big[\cos(x-y)-\cos(x+y)\Big].\end{aligned}\right\} \quad [15]$$

Формулы эти были выведены въ 1-й части для ограниченныхъ значеній x и y; здѣсь онѣ даны для *всевозможныхъ* значеній x и y.

240. Преобразованія суммъ синусовъ и косинусовъ въ произведенія.—Формулы (1), (2), (3) и (4) рѣшаютъ непосредственно вопросъ. Напишемъ ихъ въ болѣе удобной формѣ, положивъ:

$$x+y=p,\ x-y=q, \quad \text{откуда} \quad x=\frac{p+q}{2}, \quad y=\frac{p-q}{2}.$$

Внося эти значенія x и y въ указанныя формулы, получимъ:

$$
\left.\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\,.\cos\frac{p-q}{2}, \\
\sin p - \sin q &= 2\sin\frac{p-q}{2}\,.\cos\frac{p+q}{2}, \\
\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\,.\cos\frac{p-q}{2}, \\
\cos q - \cos p &= 2\sin\frac{p+q}{2}\,.\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad [16]
$$

для *всевозможныхъ* значенiй p и q.

Принимая во вниманiе, что

$$\cos q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - q\right), \qquad \sin q = \cos\left(\frac{\pi}{2} - q\right),$$

можемъ, на основанiи предыдущихъ формулъ, преобразовать въ произведенiя такiя суммы и разности:

$$\sin p \pm \cos q, \qquad \cos p \pm \sin q.$$

Такъ, напр.,

$$\sin p + \cos q = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right).$$

241. Замѣчанiе. — Положивъ, въ послѣднихъ двухъ формулахъ [16], $q = 0$, $p = x$ и принявъ во вниманiе, что $\cos 0 = 1$, получимъ:

$$
\left.\begin{aligned}
1 + \cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2}, \\
1 - \cos x &= 2\sin^2\frac{x}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad [17]
$$

для *произвольнаго* x. Формулы эти должны быть замѣчены.

242. Преобразованiе выраженiя $\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q}$. — Первыя двѣ формулы [16] даютъ:

$$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{2\sin\frac{p-q}{2}\,.\cos\frac{p+q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\,.\cos\frac{p-q}{2}} = \frac{\sin\frac{p-q}{2}}{\cos\frac{p-q}{2}} : \frac{\sin\frac{p+q}{2}}{\cos\frac{p+q}{2}},$$

или

$$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p+q}{2}} \qquad [18]$$

для *всевозможныхъ* значенiй p и q. Формула эта часто употребляется.

243 Преобразованіе суммъ синусовъ и косинусовъ чиселъ, образующихъ ариѳметическую прогрессію. — Положивъ:

$$X_n = \cos a + \cos(a + r) + \ldots + \cos[a + (n-1)r],$$
$$Y_n = \sin a + \sin(a + r) + \ldots + \sin[a + (n-1)r],$$

постараемся преобразовать X_n и Y_n въ логариѳмируемый видъ.

Имѣемъ, на основаніи второй изъ формулъ [16], равенство:

$$\sin\left[a + \frac{2t+1}{2} r\right] - \sin\left[a + \frac{2t-1}{2} r\right] = 2\sin\frac{r}{2}\cos(a + tr).$$

Давая буквѣ t послѣдовательно значенія $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ и складывая полученные результаты, получимъ:

$$2X_n \sin\frac{r}{2} = \sin\left[a + \frac{2n-1}{2} r\right] - \sin\left[a - \frac{r}{2}\right].$$

Преобразовавъ правую часть, найдемъ.

$$X_n = \frac{\sin\frac{nr}{2}}{\sin\frac{r}{2}}\cos\left(a + \frac{n-1}{2} r\right).$$

Измѣнивъ здѣсь a въ $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ и, въ то же время, r въ $(-r)$, получимъ:

$$Y_n = \frac{\sin\frac{nr}{2}}{\sin\frac{r}{2}}\sin\left(a + \frac{n-1}{2} r\right).$$

Формулы эти и имѣли въ виду вывести.

244. Преобразованіе суммы тангенсовъ. — Имѣемъ:

$$\operatorname{tg}p \pm \operatorname{tg}q = \frac{\sin p}{\cos p} \pm \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p\cos q \pm \sin q \cdot \cos p}{\cos p\cos q}.$$

Числитель второй части этого равенства представляетъ $\sin(p \pm q)$, а потому:

$$\operatorname{tg}p \pm \operatorname{tg}q = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p\cos q}. \qquad [19]$$

Измѣнивъ здѣсь соотвѣтственно p и q въ $\left(\frac{\pi}{2}-p\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}-q\right)$, найдемъ:

$$\operatorname{cotg} p \pm \operatorname{cotg} q = \frac{\sin(q \pm p)}{\sin p \sin q}. \qquad [20]$$

Формулы [19] и [20] имѣли въ виду вывести. Онѣ соотвѣтственно даютъ:

$$\frac{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q}{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q} = \frac{\sin(p - q)}{\sin(p + q)}, \qquad \frac{\operatorname{cotg} p - \operatorname{cotg} q}{\operatorname{cotg} p + \operatorname{cotg} q} = \frac{\sin(q - p)}{\sin(q + p)}.$$

245. Приложеніе. — *Преобразованіе выраженій:*

$$1 \pm \operatorname{tg} a, \qquad \frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a}.$$

Принимая во вниманіе, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, получимъ:

$$1 \pm \operatorname{tg} a = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \pm \operatorname{tg} a = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right)}{\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos a} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right)}{\cos a}.$$

Отсюда найдемъ:

$$\frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right),$$

ибо

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - a\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right).$$

§ III. О непрерывности тригонометрическихъ функцій.

246. Синусъ и косинусъ. Теорема. *Синусъ и косинусъ суть функціи* непрерывныя *при всякомъ значеніи аргумента* x. Положивъ, въ формулахъ (16), $p = x + h$ и $q = x$, получимъ:

$$\sin(x + h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\cos(x + h) - \cos x = -2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x + \frac{h}{2}\right);$$

отсюда:

$$|\sin(x+h)-\sin x| = 2\left|\sin\frac{h}{2}\right|\cdot\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|,$$
$$|\cos(x+h)-\cos x| = 2\left|\sin\frac{h}{2}\right|\cdot\left|\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|.$$

Но, при достаточно маломъ $|h|$,

$$\left|\sin\frac{h}{2}\right| < \left|\frac{h}{2}\right| \text{ (230)},$$

причемъ, при всякомъ $|h|$,

$$\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant 1, \quad \left|\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant 1 \text{ (191)};$$

слѣдовательно, при достаточно маломъ $|h|$,

$$|\sin(x+h)-\sin x| < |h|, \qquad |\cos(x+h)-\cos x| < |h|.$$

Неравенства эти говорятъ: если $|h|$ или, что то же, h стремится къ нулю по какому ни есть закону, то модули разностей: $\sin(x+h)-\sin x$, $\cos(x+h)-\cos x$ стремятся, *при всякомъ значеніи аргумента* x, къ нулю; слѣдовательно, и самыя разности стремятся къ нулю. Итакъ,

$$\lim[\sin(x+h)-\sin x]_{h=0}=0, \quad \lim[\cos(x+h)-\cos x]_{h=0}=0.$$

Равенства эти и выражаютъ, что $\sin x$ и $\cos x$ суть функціи непрерывныя *для всякаго значенія аргумента* x (**181**).

247. Слѣдствіе. —Такъ какъ $\sin x$ и $\cos x$ суть функціи непрерывныя для всякаго значенія аргумента, то онѣ непрерывны въ произвольной области (a,b) аргумента (**182**). Отсюда, на основаніи теоремы (**188**, стр. 185), выражающей «основное свойство непрерывной функціи», заключаемъ, что $\sin x$ ($\cos x$) *имѣетъ* **данное значеніе C**, *заключенное между* $\sin a$ *и* $\sin b$ ($\cos a$ *и* $\cos b$), *для нѣкотораго значенія аргумента, принадлежащаго области* (a,b).

Отмѣтимъ слѣдующія области:

1°. *Разсмотримъ область* $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ *аргумента.* Принимая во вниманіе, что

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1, \quad \sin 0 = 0, \ \sin\left(+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

на основаніи *слѣдствія* заключаемъ: $\sin x$ *имѣетъ въ области аргумента* $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ **всѣ** *значенія отъ* -1 *до* $+1$ *включительно и каждое,* **какъ увидимъ ниже (258), только** *при одномъ значеніи аргумента, причемъ въ области* $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ *принимаетъ всѣ отрицательныя значенія отъ* -1 *до* 0 *включительно, а въ области* $\left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$ — *всѣ положительныя значенія отъ* 0 *до* 1 *включительно.*

То же самое имѣетъ мѣсто *для области аргумента, ограниченной каждыми* **послѣдовательными** *корнями* **косинуса.**

Вспомнимъ при этомъ, что синусъ не можетъ принимать иныхъ значеній, кромѣ указанныхъ, въ любой области аргумента (**191**).

2°. *Разсмотримъ область* $(0, \pi)$ *аргумента.* Принимая во вниманіе, что

$$\cos 0 = 1, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad \cos\pi = -1,$$

на основаніи *слѣдствія* заключаемъ: $\cos x$ *имѣетъ въ области аргумента:* $(0, \pi)$ **всѣ** *значенія отъ* 1 *до* -1 *включительно и каждое,* **какъ увидимъ ниже (260), только** *при одномъ значеніи аргумента, причемъ въ области* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *принимаетъ* **всѣ** *положительныя значенія отъ* 1 *до* 0 *включительно, а въ области* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ **всѣ** *отрицательныя значенія отъ* 0 *до* -1 *включительно.*

То же самое имѣетъ мѣсто *для области аргумента, ограниченной каждыми* **послѣдовательными** *корнями* **синуса.**

Вспомнимъ при этомъ, что косинусъ не можетъ принимать иныхъ значеній, кромѣ указанныхъ, въ любой области аргумента (**191**).

248. Тангенсъ и котангенсъ.—Теорема. **1°** *Тангенсъ есть функція непрерывная для всѣхъ значеній аргумента, неравныхъ корнямъ косинуса.*

2°. *Котангенсъ есть функція непрерывная для всѣхъ значеній аргумента, неравныхъ корнямъ синуса.*

И въ самомъ дѣлѣ,

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Но извѣстно (**186, 7°**), что частное непрерывныхъ функцій есть функція непрерывная для всѣхъ значеній аргумента, не обращаю-

щихъ знаменателя въ нуль. Слѣдовательно, тангенсъ есть функція непрерывная для всѣхъ значеній x, неравныхъ корнямъ косинуса, а котангенсъ есть непрерывная функція для всѣхъ значеній x, неравныхъ корнямъ синуса. При корняхъ косинуса тангенсъ претерпѣваетъ разрывъ (**219, 1**), получая значенія $\pm\infty$, а при корняхъ синуса котангенсъ претерпѣваетъ разрывъ (**219, 2**), получая значенія $\mp\infty$.

249. Слѣдствіе.—Такъ какъ $\operatorname{tang} x$ ($\operatorname{cotg} x$) есть функція непрерывная для всякаго значенія аргумента, неравнаго корню косинуса (синуса), то онъ непрерывенъ *внутри* (**182**) всякой области аргумента (a, b), не заключающей корней косинуса (синуса). Отсюда, на основаніи теоремы (**188**), заключаемъ, что $\operatorname{tang} x$ ($\operatorname{cotg} x$) *имѣетъ всякое данное значеніе C, заключенное между* $\operatorname{tang} a$ *и* $\operatorname{tang} b$ ($\operatorname{cotg} a$ *и* $\operatorname{cotg} b$), *для нѣкотораго значенія аргумента, принадлежащаго области* (a, b).

Отмѣтимъ слѣдующія области:

1°. *Разсмотримъ область* $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ *аргумента, внутри которой не лежатъ корни косинуса.* Принимая во вниманіе, что, при положительномъ α, (**219, 1°**)

$$\operatorname{tang}\left[\lim\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)_{\alpha=0}\right]=-\infty, \quad \operatorname{tang} 0=0, \quad \operatorname{tang}\left[\lim\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)_{\alpha=0}\right]=+\infty,$$

заключаемъ, что $\operatorname{tang} x$ *имѣетъ въ области аргумента* $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ **всевозможныя** *значенія и каждое,* **какъ увидимъ ниже (262), только** *при одномъ значеніи аргумента, причемъ въ области* $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ *принимаетъ* **только отрицательныя** *значенія* (**211, 2°**), *а въ области* $\left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$ **только положительныя** *значенія* (**211, 1°**) [1].

---

[1]) Возьмемъ, для большей вразумительности, примѣры. 1°. Спрашивается, можетъ ли тангенсъ получить, напримѣръ, значеніе 15675? При достаточно маломъ положительномъ α непремѣнно получимъ $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=B$, гдѣ B есть нѣкоторое число, большее числа 15675; слѣдовательно, тангенсъ, для нѣкотораго значенія аргумента, лежащаго въ области $\left(0, \frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, а слѣдовательно и въ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, получимъ значеніе 15675, какъ лежащее между $\operatorname{tg} 0=0$ и $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=B$.

2°. Спрашивается, можетъ ли тангенсъ получить, напримѣръ, значеніе

То же самое имѣетъ мѣсто *для области аргумента, ограниченной каждыми двумя* **послѣдовательными** *корнями* **синуса.**

2°. *Разсмотримъ область* $(0, \pi)$ *аргумента, внутри которой не лежатъ корни синуса.*

Принимая во вниманіе, что, при положительномъ α, **(219, 2°)**

$$\operatorname{cotg}[\lim(0+\alpha)_{\alpha=0}]=+\infty, \qquad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}=0, \qquad \operatorname{cotg}[\lim(\pi-\alpha)_{\alpha=0}]=-\infty,$$

заключаемъ, что $\operatorname{cotg} x$ *имѣетъ въ области аргумента* $(0, \pi)$ **всевозможныя** *значенія и каждое,* какъ увидимъ ниже **(262, 1°)**, *только при одномъ значеніи аргумента, причемъ въ области* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *принимаетъ* **только положительныя значенія (213),** *а въ области* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ — **только отрицательныя значенія (213).**

250. Секансъ и косекансъ.—Теорема. **1°**. *Секансъ есть функція непрерывная для всѣхъ значеній аргумента, неравныхъ корнямъ косинуса.*

2°. *Косекансъ есть функція непрерывная для всѣхъ значеній аргумента, неравныхъ корнямъ синуса.*

И въ самомъ дѣлѣ,

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}.$$

Но извѣстно **(186, 7°)**, что частное непрерывныхъ функцій есть функція непрерывная для всѣхъ значеній аргумента, не обращающихъ знаменателя въ нуль. Слѣдовательно, секансъ есть непрерывная функція для всѣхъ значеній x, неравныхъ корнямъ косинуса, а косекансъ есть непрерывная функція для всѣхъ значеній x, неравныхъ корнямъ синуса. При корняхъ косинуса секансъ претерпѣваетъ разрывъ **(220)**, получая значенія $\pm\infty$ или $\mp\infty$, а при корняхъ синуса косекансъ претерпѣваетъ разрывъ $\mp\infty$ или $\pm\infty$.

-36785? При достаточно маломъ положительномъ α непремѣнно получимъ $\operatorname{tang}\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=C$, гдѣ C есть нѣкоторое отрицательное число, меньшее числа -36785; слѣдовательно, тангенсъ, для нѣкотораго значенія аргумента, лежащаго въ области $\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha, 0\right)$, а слѣдовательно и въ области $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, получитъ значеніе -36785, какъ лежащее между $\operatorname{tang}\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=C$ и $\operatorname{tang}0=0$.

251. Слѣдствіе.—Такъ какъ $\sec x$($\operatorname{cosec} x$) есть функція непрерывная для всякаго значенія аргумента, неравнаго корню косинуса (синуса), то онъ непрерывенъ внутри области (a, b) аргумента, не заключающей корней косинуса (синуса). Отсюда, на основаніи теоремы (**188**), заключаемъ, что $\sec x$($\operatorname{cosec} x$) *имѣетъ всякое данное значеніе C, заключенное между* $\sec a$ *и* $\sec b$($\operatorname{cosec} a$ и $\operatorname{cosec} b$), *для нѣкотораго значенія аргумента, принадлежащаго области (a, b).*

Отмѣтимъ слѣдующія области:

1°. *Разсмотримъ область* $(0, \pi)$ *аргумента, которую разобьемъ на двѣ:* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Принимая во вниманіе, что *внутри* каждой изъ нихъ не заключенъ корень косинуса, т.-е. $\sec x$ внутри каждой изъ нихъ непрерывенъ, и что

$$\sec 0 = 1, \qquad \sec\left[\lim\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)_{\alpha=0}\right] = +\infty,$$

и

$$\sec\left[\lim\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)_{\alpha=0}\right] = -\infty, \qquad \sec\pi = -1,$$

заключаемъ, что $\sec x$ *имѣетъ въ области* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **всѣ** *положительныя значенія, не меньшія* 1, и *каждое,* какъ увидимъ ниже (**265**), **только** *при одномъ значеніи аргумента, причемъ отрицательныхъ значеній въ этой области не имѣетъ* (**209**), *а въ области* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ — **всѣ** *отрицательныя значенія, не большія* -1, и *каждое,* какъ увидимъ ниже (**265**), **только** *при одномъ значеніи аргумента, причемъ положительныхъ значеній въ этой области не имѣетъ* (**209**).

Слѣдовательно, *въ области* $(0, \pi)$ *секансъ имѣетъ всевозможныя значенія, удовлетворяющія условіямъ:*

$$\sec x \leqslant -1 \quad \text{и} \quad \sec x \geqslant 1.$$

То же самое имѣетъ мѣсто *для области, ограниченной каждыми* **послѣдовательными** *корнями* **синуса.**

Знаемъ (**194**), что другихъ значеній секансъ не имѣетъ ни въ какой области аргумента [1]).

---

[1]) Замѣтимъ, что въ области $(0, \pi)$ лежитъ корень косинуса равный $\frac{\pi}{2}$. Слѣдовательно, къ этой области теорема (188) непримѣнима. И дѣйствительно, $\sec x$ не имѣетъ значеній, заключенныхъ между $\sec 0 = 1$ и $\sec\pi = -1$.

2°. *Разсмотримъ область* $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ *аргумента, которую разобьемъ на двѣ:* $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Принимая во вниманіе, что *внутри* каждой изъ нихъ не заключенъ корень синуса, т. е. $\operatorname{cosec} x$ внутри каждой изъ нихъ непрерывенъ, и что

$$\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \qquad \operatorname{cosec}[\lim(0-\alpha)]_{\alpha=0} = -\infty$$

и

$$\operatorname{cosec}[\lim(0+\alpha)]_{\alpha=0} = +\infty; \qquad \operatorname{cosec}\left(+\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

заключаемъ, что $\operatorname{cosec} x$ *имѣетъ въ области* $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ всѣ *отрицательныя значенія, не большія* -1, и *каждое,* какъ увидимъ ниже (**266**), **только** *при одномъ значеніи аргумента, причемъ положительныхъ значеній въ этой области не имѣетъ* (**206**), *а въ области* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — всѣ *положительныя значенія, не меньшія* 1, и *каждое,* какъ увидимъ ниже (**266**), **только** *при одномъ значеніи аргумента, причемъ отрицательныхъ значеній въ этой области не имѣетъ.*

Слѣдовательно, *въ области* $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ *косекансъ имѣетъ всевозможныя значенія, удовлетворяющія условіямъ:*

$$\operatorname{cosec} x \leqslant -1 \quad \text{и} \quad \operatorname{cosec} x \geqslant 1.$$

То же самое имѣетъ мѣсто *для области, ограниченной каждыми двумя* **послѣдовательными** *корнями* **косинуса.**

Знаемъ, что другихъ значеній косекансъ не имѣетъ ни въ какой области аргумента [1]).

§ IV. Производныя тригонометрическихъ функцій.

252. Производная функція. Разсмотримъ нѣкоторую функцію $f(x)$, **непрерывную** въ области аргумента:

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

[1]) Замѣтимъ, что въ области $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ лежитъ корень синуса, равный 0. Слѣдовательно, къ этой области теорема (**188**) непримѣнима. И дѣйствительно, $\operatorname{cosec} x$ не имѣетъ значеній, заключенныхъ между $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ и $\operatorname{cosec}\left(+\frac{\pi}{2}\right) = +1$.

и возьмемъ нѣкоторое значеніе c **внутри** этой области:

$$a < c < b.$$

Возьмемъ **перемѣнное** число h, удовлетворяющее условію:

$$a < c + h < b,$$

или, что то же, $a - c < h < b - c$. Это число h имѣетъ, слѣдовательно, какъ **положительныя**, такъ и **отрицательныя** значенія. Ясно, что функція $f(c + h)$ будетъ непрерывная функція h, ибо перемѣнное $c + h$ не выходитъ изъ области аргумента x. Перемѣнное h есть **приращеніе** (184) значенія c **аргумента** x.

Разность:

$$f(c + h) - f(c)$$

представитъ соотвѣтствующее **приращеніе функціи**.

Разсмотримъ **отношеніе**:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h}. \tag{1}$$

Если приращеніе h **безконечно мало**, то приращеніе $f(c + h) - f(c)$ также **безконечно мало**, ибо значенія $c + h$ и c аргумента x не выходятъ изъ области непрерывности функціи $f(x)$.

Положимъ, что отношеніе (1) имѣетъ, при этихъ условіяхъ, **предѣлъ**, не зависящій отъ того закона, по которому перемѣнное h стремится къ нулю, и, слѣдовательно, *независящій*, между прочимъ, *отъ знака приращенія* h. Вообразимъ теперь, что, для каждаго значенія аргумента x изъ области:

$$a < x < b,$$

составлены эти предѣлы.

Функція, имѣющая своими значеніями, для соотвѣтствующихъ значеній аргумента x, эти предѣлы, называется **производною функціею**, или, просто, **производною данной функціи** $f(x)$ и означается символомъ $f'(x)$. Ея значеніе для $x = c$ означается такъ: $f'(c)$.

Итакъ, слѣдовательно, **если производная** $f'(x)$ **для данного** *значенія аргумента существуетъ, то ея опредѣленіе выражается* **равенствомъ**:

$$f'(x) = \lim \left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right|_{\lim h = 0,\ h \gtreqless 0} \tag{2}$$

Иногда означаютъ: функцію $f(x)$ одною буквою, напр., y, такъ что $y = f(x)$; ея производную, соотвѣтственно, буквою y', такъ что $y' = f'(x)$; приращеніе аргумента символомъ Δx и соотвѣтственное приращеніе функціи символомъ Δy. При этихъ обозначеніяхъ будемъ, по опредѣленію, имѣть:

$$y' = \lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\lim \Delta x = 0,\ \Delta x \gtreqless 0} \tag{3}$$

Установленное понятіе о производной требуетъ, чтобы приращеніе h могло быть и положительнымъ, и отрицательнымъ, если значеніе c удовлетворяетъ условію $a < c < b$, т.-е. лежитъ **внутри** области аргумента.

Если же c совпадаетъ съ одною изъ границъ этой области, т.-е. если $c = a$ или $c = b$, то, при $c = a$, $h > 0$, и, при $c = b$, $h < 0$, и опредѣленія значеній: $f'(a)$ и $f'(b)$ выражаются такими равенствами:

$$f'(a) = \lim \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right]_{\lim h = 0,\ h > 0},$$

$$f'(b) = \lim \left[\frac{f(b+h) - f(b)}{h}\right]_{\lim h = 0,\ h < 0}.$$

Замѣтимъ, что производныя $f'(a)$ и $f'(b)$ называются соотвѣтственно *производными въ сторону возрастанія и убыванія аргумента.*

Если одно изъ отношеній:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{или} \quad \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$$

безгранично возрастаетъ при безграничномъ убываніи модуля h, причемъ модуль разности $f(x+h) - f(x)$ безгранично убываетъ, то говорятъ, что производная $f'(x)$ существуетъ и равна $+\infty$ или $-\infty$.

Необходимымъ условіемъ существованія производной является непрерывность первообразной. Долгое время полагали, что это необходимое условіе есть вмѣстѣ съ тѣмъ и *достаточное;* но въ настоящее время приведены многочисленные примѣры непрерывныхъ функцій, которыя не имѣютъ производныхъ при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ аргумента.

Составлены даже такія непрерывныя функціи, которыя не имѣютъ производныхъ ни при какомъ значеніи аргумента.

Дадимъ нѣсколько примѣровъ.

1°. Положимъ, что $f(x)=ax+b$. По опредѣленію производной имѣемъ:

$$f'(x)=\lim\left[\frac{[a(x+h)+b]-(ax+b)}{h}\right]_{\lim h=0}=a,$$

т.-е. производная *линейной* функціи $ax+b$ равна *постоянному* числу a.

2°. Возьмемъ $f(x)=x^2$. Имѣемъ:

$$f'(x)=\lim\left[\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\right]_{\lim h=0}=\lim\left[2x+h\right]_{\lim h=0}=2x.$$

3°. Разсмотримъ $f(x)=\frac{1}{x}$. Имѣемъ:

$$f'(x)=\lim\left[\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}\right]_{\lim h=0}=\lim\left[\frac{-1}{x(x+h)}\right]_{\lim h=0}=-\frac{1}{x^2}.$$

Замѣтимъ, что функція $\frac{1}{x}$, при $x=0$, разрывна и, слѣдовательно, при этомъ x не имѣетъ производной.

4°. Разсмотримъ $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$. Функція эта есть функція непрерывная для *всѣхъ* значеній аргумента. Найдемъ ея производную при $x=0$. По опредѣленію имѣемъ:

$$f'(0)=\lim\left[\frac{(0+h)^{\frac{2}{3}}-0^{\frac{2}{3}}}{h}\right]_{\lim h=0}=\lim\left(h^{-\frac{1}{3}}\right)_{\lim h=0}.$$

Но $h^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{h}}$ стремится къ $-\infty$, если $h<0$, и стремится къ $+\infty$, если $h>0$. Отсюда слѣдуетъ, что производной при $x=0$ не существуетъ.

6° Разсмотримъ, наконецъ, непрерывную функцію $f(x)$, опредѣленную такимъ образомъ:

$$f(x)=-x+5, \qquad \text{для} \qquad 1\leqslant x\leqslant 2,$$

и

$$f(x)=2x+2, \qquad \text{для} \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Она, очевидно, представляетъ непрерывную функцію въ области:

$$0\leqslant x\leqslant 2.$$

Графически функція эта изобразится ломанною линіею, состоящею изъ двухъ прямыхъ, точка пересѣченія коихъ имѣетъ абсциссою число 1.

Производная данной функціи будетъ такова

$$f'(x) = -1, \quad \text{для области:} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2,$$
$$f'(x) = \quad 2, \quad \text{для области:} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

слѣдовательно, производная имѣетъ вполнѣ опредѣленную величину для всякаго значенія аргумента x въ области: $0 \leqslant x \leqslant 2$, за исключеніемъ значенія $x = 1$, при каковомъ производная имѣетъ два значенія: $f'(1) = -1$ и $f'(1) = 2$, зависящія отъ того закона, по которому h стремится къ нулю, а именно: первое значеніе соотвѣтствуетъ случаю $h > 0$, второе случаю $h < 0$, ибо для $1 \leqslant x \leqslant 2$ значеніе аргумента, равное 1, можетъ получать только положительныя приращенія ($h > 0$), для области же $0 \leqslant x \leqslant 1$ то же значеніе можетъ получать только отрицательныя приращенія ($h < 0$).

Замѣтимъ, что если бы разсматривать *только* область $1 \leqslant x \leqslant 2$ (или только область $0 \leqslant x \leqslant 1$), то производная, при $x = 1$, существовала бы и равнялась -1 (или 2), представляя производную въ сторону возрастанія (убыванія) аргумента.

253. Производная синуса.—**Производная $\sin x$ есть $\cos x$.** И въ самомъ дѣлѣ, приращеніе функціи $y = \sin x$, выражаемое разностью:

$$\sin(x + h) - \sin x,$$

можетъ быть преобразовано (**240**) въ произведеніе:

$$2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}.$$

Для нахожденія предѣла, къ которому стремится это отношеніе, когда h стремится къ нулю, представимъ его въ видѣ произведенія:

$$\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Но

$$\lim \left[\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right]_{\lim h = 0} = 1 \ (\mathbf{231}) \qquad \text{и} \qquad \lim \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)_{\lim h = 0} = \cos x \ (\mathbf{281}),$$

а потому

$$\lim \left[\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}\right]_{\lim h = 0} = \cos x,$$

что и требовалось доказать.

254. Производная $\cos x$. — Производная $\cos x$ есть $-\sin x$ И въ самомъ дѣлѣ, приращеніе функціи $y = \cos x$, выражаемое разностью:

$$\cos(x+h) - \cos x,$$

можетъ быть преобразовано (**240**) въ произведеніе:

$$-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\frac{2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}.$$

Для нахожденія предѣла, къ которому стремится это отношеніе, когда h стремится къ нулю, представимъ его въ видѣ произведенія:

$$-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Но

$$\lim\left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right]_{\lim h=0} = 1 \quad (\mathbf{231}), \qquad \lim\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)_{\lim h=0} = \sin x \quad (\mathbf{181}),$$

а потому

$$\lim\left[\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\right]_{\lim h=0} = -\sin x,$$

что и требовалось доказать

255. Производная тангенса и котангенса. — 1°. Производная $\operatorname{tang} x$ есть $\frac{1}{\cos^2 x}$. 2°. Производная $\operatorname{cotg} x$ есть $-\frac{1}{\sin^2 x}$. И въ самомъ дѣлѣ, принявъ во вниманіе, что (**244**)

$$\operatorname{tang}(x+h) - \operatorname{tang} x = \frac{\sin h}{\cos x\cos(x+h)},$$

$$\operatorname{cotg}(x+h) - \operatorname{cotg} x = -\frac{\sin h}{\sin x\sin(x+h)},$$

легко получимъ указанныя выраженія для производныхъ $\operatorname{tang} x$ и $\operatorname{cotg} x$.

256. Производная секанса и косеканса. — **1°.** Производная $\sec x$ есть $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$. **2°.** Производная $\operatorname{cosec} x$ есть $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. И въ самомъ дѣлѣ, принявъ во вниманіе, что

$$\sec(x+h) - \sec x = \frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x} = \frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\cos(x+h)\cos x},$$

$$\operatorname{cosec}(x+h) - \operatorname{cosec} x = \frac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin x \sin(x+h)} = -\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{\sin(x+h)\sin x},$$

легко получимъ указанныя выраженія для производныхъ $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$.

§ V. Измѣненія значеній тригонометрическихъ функцій при непрерывномъ возрастаніи аргумента. Maxima и minima тригонометрическихъ функцій.

257. Опредѣленіе. — *Функція* $f(x)$ *называется* **возрастающею (убывающею)** *въ области аргумента* (a, b), *если для двухъ значеній* x_1 *и* x_2 *аргумента, лежащихъ въ этой области и удовлетворяющихъ условію:* $x_2 > x_1$, *соотвѣтствующія значенія функціи удовлетворяютъ неравенству:*

$$f(x_2) > f(x_1), \qquad [f(x_2) < f(x_1)].$$

258. Теорема о возрастаніи (убываніи) синуса. — *Синусъ есть возрастающая или убывающая функція въ области* (a, b) *аргумента, незаключающей внутри этой области корня косинуса.*

Положимъ, что область (a, b) не заключаетъ ни одного корня косинуса. Такъ какъ модули корней косинуса могутъ быть сколь угодно велики, то область (a, b), не заключая, по условію, ни одного корня косинуса, лежитъ между двумя послѣдовательными корнями его: $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ и $(2k+3)\frac{\pi}{2}$, т.-е.

$$(2k+1)\frac{\pi}{2} \leqslant a < b \leqslant (2k+3)\frac{\pi}{2}.$$

Слѣдовательно, $\cos x$, *представляющій производную* (**254**) *синуса, для всѣхъ значеній области* (a, b) *есть число положительное, если* k *нечетное, и число отрицательное, если* k *четное* (**208**).

Возьмемъ въ области (a, b) два числа x_2 и x_1, удовлетворяющія условію:

$$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b.$$

Эти числа удовлетворяютъ, слѣдовательно, условію:

$$(2k+1)\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant (2k+3)\frac{\pi}{2},$$

откуда:

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad (2k+1)\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < (2k+3)\frac{\pi}{2}.$$

Неравенства эти даютъ:

$$\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$$

и, кромѣ сего (**208**), $\cos\frac{x_2+x_1}{2} > 0$, если k *нечетное*, и $\cos\frac{x_2+x_1}{2} < 0$, если k *четное*.

Съ другой стороны, имѣли (**240**)

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}.$$

Равенство это, при помощи только что написанныхъ неравенствъ, говоритъ, что

$$\sin x_2 > \sin x_1, \quad \text{если } k \text{ нечетное},$$

и

$$\sin x_2 < \sin x_1, \quad \text{если } k \text{ четное},$$

что и требовалось доказать.

Предыдущая теорема показываетъ, что въ области (a, b) синусъ будетъ возрастать или убывать, смотря по тому, какое k—*нечетное* или *четное*, или смотря по тому, какой косинусъ, представляющій производную синуса,—положительный или отрицательный, отъ значенія: $\sin a$ до значенія: $\sin b$. Такъ какъ $\sin x$ *есть функція непрерывная* (**246**), то онъ, принимая, какъ показано (**247**), всѣ значенія отъ $\sin a$ до $\sin b$, приметъ ихъ, *возрастая* или *убывая отъ* $\sin a$ *до* $\sin b$. Если границы a и b таковы:

$$a = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad b = (2k+3)\frac{\pi}{2},$$

то

$$\sin a = (-1)^k, \quad \sin b = (-1)^{k+1},$$

и, слѣдовательно, $\sin x$ въ области $\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2}\right]$ **непрерывно** возрастаетъ (убываетъ) отъ -1 до $+1$ (отъ $+1$ до -1), т.-е. *возрастая (убывая), принимаетъ, по непрерывности, всѣ значенія, какія способенъ принимать, и каждое только по одному разу* (**247, 1°**).

259. Таблица измѣненій синуса. — Положимъ, что область (a, b) заключаетъ нѣсколько корней *косинуса*. Разбивъ ее этими корнями на частныя области и приложивъ къ каждой изъ нихъ предыдущую теорему, придемъ къ слѣдующей таблицѣ измѣненій *синуса* при непрерывномъ возрастаніи аргумента.

аргу-мент.	a	…	$-\frac{5\pi}{2}$	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}$	$+\pi$	$+\frac{3\pi}{2}$	$+\frac{3\pi}{2}$	$+2\pi$	$+\frac{5\pi}{2}$	…	b
sin	$\sin a$	…	-1	0	$+1$	$+1$	0	-1	-1	0	$+1$	$+1$	0	-1	-1	0	$+1$	…	$\sin b$
				возрастаетъ			убываетъ			возрастаетъ			убываетъ			возрастаетъ			
произв. cos	$\cos a$	…	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	…	$\cos b$
				положительная			отрицательная			положительная			отрицательная			положительная			

17*

Разсматривая эту таблицу, видимъ:

1°. При непрерывномъ возрастаніи аргумента и при переходѣ его черезъ *корни* $\cos x$:

$$\ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}, +\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

синусъ переходитъ изъ состоянія возрастанія въ состояніе убыванія, когда соотвѣтствующій корень косинуса имѣетъ видъ $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k *четное*, и изъ состоянія убыванія въ состояніе возрастанія, когда корень косинуса имѣетъ видъ $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k *нечетное*. Въ моментъ перехода въ состояніе убыванія, синусъ имѣетъ значеніе, равное $+1$, а въ моментъ перехода въ состояніе возрастанія—значеніе, равное (-1).

То значеніе функціи, достигнувъ коего, при **непрерывномъ возрастаніи** *аргумента, функція переходитъ изъ состоянія* **возрастанія** *въ состояніе* **убыванія**, *называется ея* **maximum**'*омъ. То значеніе функціи, достигнувъ коего, при непрерывномъ возрастаніи аргумента, функція переходитъ изъ состоянія* **убыванія** *въ состояніе* **возрастанія**, *называется ея* **minimum**'*омъ* [1]).

Видимъ, что *maximum* синуса равенъ $+1$, и синусъ достигаетъ его при переходѣ аргумента черезъ корни косинуса, равные $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k *четное*. *Minimum* синуса равенъ -1, и синусъ

---

[1]) Вообще *maximum*'омъ функціи $f(x)$ называется ея значеніе $f(a)$, удовлетворяющее неравенствамъ:

$$f(a-h) < f(a) > f(a+h),$$

при всякомъ положительномъ h, удовлетворяющемъ неравенству: $h < \alpha$, гдѣ α есть постоянное достаточно малое число.

Minimum'омъ функціи $f(x)$ называется ея значеніе $f(a)$, удовлетворяющее неравенствамъ:

$$f(a-h) > f(a) < f(a+h),$$

при всякомъ положительномъ h, удовлетворяющемъ неравенству: $h < \alpha$, гдѣ α есть постоянное достаточно малое число.

Понятія о maximum'ѣ и minimum'ѣ синуса, данныя выше, заключаются въ данныхъ сейчасъ опредѣленіяхъ. И въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ неравенства:

$$\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-h\right] < \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] > \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+h\right], \text{ если } k \text{ четное,}$$

$$\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-h\right] > \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right] < \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+h\right], \text{ если } k \text{ нечетное,}$$

гдѣ $0 < h \leqq 2\pi$.

достигаетъ его при переходѣ аргумента черезъ корни косинуса, равные $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k *нечетное. Число maximum'овъ и minimum'овъ синуса въ области (a, b) равно, слѣдовательно, числу корней косинуса въ этой области.*

Maximum синуса совпадаетъ съ **наибольшимъ** значеніемъ, какое только синусъ можетъ имѣть, а *minimum* — съ **наименьшимъ**.

Замѣтимъ, что **производная** *синуса, т.-е косинусъ, при переходѣ аргумента черезъ значенія, соотвѣтствующія maximum'у или minimum'у синуса, обращаясь въ нуль,* **мѣняетъ знакъ** [1]), *переходя изъ положительнаго состоянія въ отрицательное при maximum'ѣ синуса и изъ отрицательнаго состоянія въ положительное при minimum'ѣ синуса.*

2°. Значенія синуса, *симметрично* расположенныя относительно его maximum'а и minimum'а, т.-е. отвѣчающія значеніямъ аргумента: $(2k+1)\frac{\pi}{2}-\alpha$ и $(2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha$, равны между собою, ибо имѣли выше (**225, 226**):

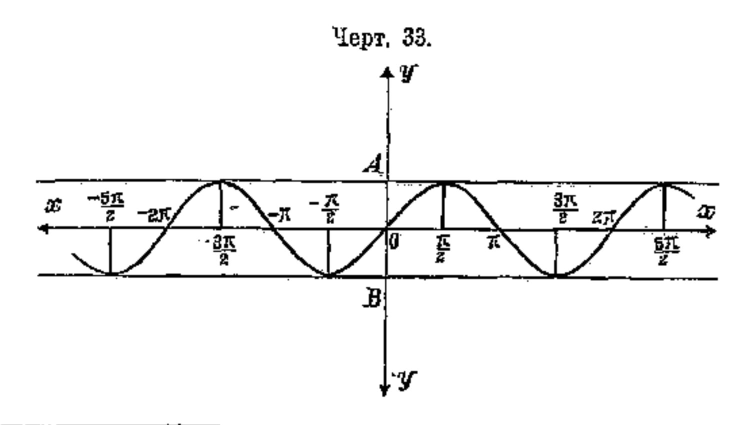
$$\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-\alpha\right]=\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha\right].$$

3°. Значенія синуса, *симметрично* расположенныя относительно его значеній, равныхъ нулю, т.-е. отвѣчающія значеніямъ аргумента: $(k\pi+\alpha)$ и $(k\pi-\alpha)$, равны по модулю и противоположны по знаку, ибо имѣли выше (**223, 224**):

$$\sin(k\pi+\alpha)=-\sin(k\pi-\alpha).$$

4°. Предыдущія замѣчанія показываютъ, что кривая, представляющая $\sin x$ (**179**), имѣетъ форму, указываемую черт. (33), гдѣ $OA=+1$, $OB=-1$.

Черт. 33.



[1]) См. *Н. Билибинъ*. „Основанія анализа безконечно малыхъ". 1907 г. Стр. 310 и слѣд

260. Теорема о возрастаніи (убываніи) косинуса.—Косинусъ *есть возрастающая или убывающая функція въ области* (a, b) *аргумента, не заключающей ни одного корня* **синуса.**

Положимъ, что область (a, b) не заключаетъ ни одного корня синуса. Такъ какъ модули корней синуса могутъ быть сколь угодно велики, то область (a, b), не заключая, по условію, ни одного корня синуса, лежитъ между двумя послѣдовательными корнями его: $k\pi$ и $(k+1)\pi$, т.-е.

$$k\pi \leqslant a < b < (k+1)\pi.$$

Слѣдовательно, $(-\sin x)$, *представляющій производную косинуса* **(254)**, *для всѣхъ значеній области* (a, b) *есть положительное число, если* k *нечетное, и отрицательное число, если* k *четное* **(205)**.

Возьмемъ въ области (a, b) два числа x_2 и x_1, удовлетворяющія условію:

$$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b.$$

Числа эти удовлетворяютъ, слѣдовательно, условію:

$$k\pi \leqslant x_1 < x_2 \leqslant (k+1)\pi,$$

откуда:

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad k\pi < \frac{x_2 + x_1}{2} < (k+1)\pi.$$

Неравенства эти даютъ:

$$\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$$

и, кромѣ сего, **(205)** $-\sin\frac{x_2+x_1}{2} > 0$, если k *нечетное*, и $-\sin\frac{x_2+x_1}{2} < 0$, если k *четное*.

Съ другой стороны, имѣли **(240)**:

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\sin\frac{x_2 + x_1}{2}.$$

Равенство это, при помощи только что написанныхъ неравенствъ, говоритъ, что

$$\cos x_2 > \cos x_1, \text{ если } k \textit{ нечетное},$$

и

$$\cos x_2 < \cos x_1, \text{ если } k \textit{ четное},$$

что и требовалось доказать.

Предыдущая теорема показываетъ, что въ области (a, b) косинусъ будетъ возрастать или убывать отъ значенія: $\cos a$ до значенія: $\cos b$, смотря по тому, какое k — *нечетное* или *четное*, или какой $(-\sin x)$, представляющій производную косинуса, — положительный или отрицательный. Такъ какъ $\cos x$ есть *функція непрерывная* (**246**), то онъ, принимая, какъ показано (**247**), всѣ значенія отъ $\cos a$ до $\cos b$, приметъ ихъ *возрастая (убывая) отъ* $\cos a$ *до* $\cos b$. Если границы a и b таковы·

$$a = k\pi, \qquad b = (k+1)\pi,$$

то

$$\cos a = (-1)^k, \qquad \cos b = (-1)^{k+1},$$

и, слѣдовательно, $\cos x$ въ области $[k\pi, (k+1)\pi]$ *непрерывно* возрастаетъ (убываетъ) отъ -1 до $+1$ (отъ $+1$ до -1), т.-е. *возрастая (убывая) принимаетъ, вслѣдствіе непрерывности, всѣ значенія, какія способенъ принимать, и каждое только по одному разу* (**247, 2°**).

261. Таблица измѣненій косинуса. —Положимъ, что область (a, b) заключаетъ нѣсколько корней *синуса*. Разбивъ ее этими корнями на частныя области и приложивъ къ каждой изъ нихъ предъидущую теорему, придемъ къ слѣдующей таблицѣ измѣненій *косинуса* при непрерывномъ возрастаніи аргумента:

аргументъ.	a	…	$-2\pi \quad -\frac{3\pi}{2} \quad -\pi$	$-\pi \quad -\frac{\pi}{2} \quad 0$	$0 \quad +\frac{\pi}{2} \quad +\pi$	$+\pi \quad +\frac{3\pi}{2} \quad +2\pi$	…	b
cos	$\cos a$	…	$1 \quad 0 \quad -1$ убываетъ	$-1 \quad 0 \quad 1$ возрастаетъ	$1 \quad 0 \quad -1$ убываетъ	$-1 \quad 0 \quad +1$ возрастаетъ	…	$\cos b$
производ. — sin	$-\sin a$	…	$0 \quad -1 \quad 0$ отрицательная	$0 \quad +1 \quad 0$ положительная	$0 \quad -1 \quad 0$ отрицательная	$0 \quad 1 \quad 0$ положительная	…	$-\sin b$

Разсматривая эту таблицу, видимъ:

1°. При непрерывномъ возрастаніи аргумента и при переходѣ его черезъ корни $\sin x$ или, что то же, $(-\sin x)$:

$$\ldots, -2\pi, \quad -\pi, \quad 0, \quad +\pi, \quad +2\pi, \ldots.$$

косинусъ переходитъ изъ состоянія возрастанія въ состояніе убыванія, когда соотвѣтствующій корень синуса имѣетъ видъ: $k\pi$, гдѣ k *четное*, и изъ состоянія убыванія въ состояніе возрастанія, когда корень синуса имѣетъ видъ $k\pi$, гдѣ k *нечетное*. Въ моментъ перехода въ состояніе убыванія косинусъ имѣетъ значеніе, равное $+1$, а въ состояніе убыванія—значеніе, равное (-1).

Слѣдовательно, *maximum* косинуса равенъ $+1$, и косинусъ достигаетъ его при переходѣ аргумента черезъ корни синуса, равные $k\pi$, гдѣ k *четное*. *Minimum* косинуса равенъ (-1), и косинусъ достигаетъ его при переходѣ аргумента черезъ корни синуса, равные $k\pi$, гдѣ k *нечетное*.

Число maximum'овъ и minimum'овъ косинуса въ области (a, b) *равно, слѣдовательно, числу корней синуса въ этой области.*

Замѣтимъ, что **производная** косинуса, *т.-е.* $(-\sin x)$, *при переходѣ аргумента черезъ значенія, соотвѣтствующія maximum'у или minimum'у косинуса, обращаясь въ нуль*, **мѣняетъ знакъ**, *переходя изъ положительнаго состоянія въ отрицательное при maximum'ѣ косинуса и изъ отрицательнаго состоянія въ положительное при minimum'ѣ косинуса.*

2°. Значенія косинуса, *симметрично* расположенныя относительно его maximum'а и minimum'а, т.-е. отвѣчающія значеніямъ аргумента: $k\pi+\alpha$ и $k\pi-\alpha$, равны, ибо имѣли выше (**223, 224**):

$$\cos(k\pi+\alpha)=\cos(k\pi-\alpha).$$

3° Значенія косинуса, *симметрично* расположенныя относительно его значеній, равныхъ нулямъ, т.-е. отвѣчающія значеніямъ аргумента:

$$(2k+1)\frac{\pi}{2}-\alpha \quad \text{и} \quad (2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha,$$

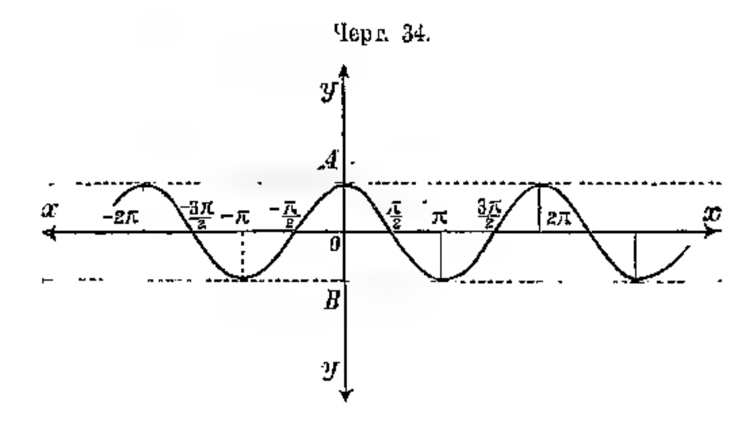
равны по модулю и противоположны по знаку, ибо имѣли выше (**225, 226**):

$$\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-\alpha\right]=-\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha\right].$$

4°. Предыдущія замѣчанія показываютъ, что кривая, пред-

ставляющая $\cos x$, имѣетъ форму, указываемую черт. (34), гдѣ $OA = 1$, $OB = -1$ [1]).

Черт. 34.



262. Теорема о возрастаніи тангенса.—*Тангенсъ есть функція возрастающая для произвольной области аргумента (a, b), причемъ его производная $\frac{1}{\cos^2 x}$ есть число положительное.*

1°. Положимъ, во-первыхъ, что область (a, b) не заключаетъ ни одного корня косинуса, или, что то же, ни одного корня котангенса, т.-е. ни одного полюса тангенса. Она, слѣдовательно, лежитъ между двумя послѣдовательными корнями (полюсами) косинуса (тангенса). Пусть

$$(2k+1)\frac{\pi}{2} < a < b < (2k+3)\frac{\pi}{2}.$$

Возьмемъ два числа x_2 и x_1 въ области (a, b), удовлетворяющія условію:

$$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b.$$

Они удовлетворятъ неравенствамъ:

$$(2k+1)\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < (2k+3)\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$0 < x_2 - x_1 < \pi, \quad \text{и, слѣдовательно,} \quad \sin(x_2 - x_1) > 0;$$

[1]) Форма и размѣры этой кривой совершенно одинаковы съ таковыми же кривой, изображающей $\sin x$. Только эта кривая иначе расположена относительно осей координатъ. Это и понятно, ибо $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

кромѣ сего,

$$\cos x_2 \,.\, \cos x_1 > 0,$$

ибо $\cos x_2$ и $\cos x_1$ суть числа совмѣстно положительныя и совмѣстно отрицательныя и неравныя нулю.

Съ другой стороны, имѣли (**274**):

$$\operatorname{tang} x_2 - \operatorname{tang} x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1}.$$

Равенство это, при помощи только-что написанныхъ неравенствъ, говоритъ, что

$$\operatorname{tang} x_2 > \operatorname{tang} x_1,$$

что и требовалось доказать.

Теорема, доказанная относительно области (a, b), не заключающей ни одного полюса тангенса, показываетъ, что въ этой области тангенсъ возрастаетъ отъ значенія: $\operatorname{tang} a$ до значенія: $\operatorname{tang} b$. Такъ какъ $\operatorname{tang} x$ *есть функція непрерывная въ области* (a, b), *то онъ,* принимая, какъ показано (**249**), всѣ значенія *отъ* $\operatorname{tang} a$ *до* $\operatorname{tang} b$, *приметъ ихъ, возрастая отъ* $\operatorname{tang} a$ *до* $\operatorname{tang} b$.

Если границы a и b таковы, что

$$a = \lim\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + \alpha\right]_{\alpha=0}, \qquad b = \lim\left[(2k+3)\frac{\pi}{2} - \alpha\right]_{\alpha=0},$$

то (**219**)

$$\operatorname{tang} a = -\infty, \qquad \operatorname{tang} b = +\infty,$$

и, слѣдовательно, $\operatorname{tang} x$ *въ области* $\left[(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad (2k+3)\frac{\pi}{2}\right]$ *возрастаетъ, принимая всевозможныя значенія отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$ (**249, 1°**).

2°. Если область (a, b) содержитъ нѣсколько корней косинуса, или, что то же, полюсовъ тангенса, то разбивъ ее этими полюсами на частныя области и приложивъ къ каждой изъ нихъ предыдущую теорему, увидимъ, что въ каждой изъ областей тангенсъ, возрастая отъ $-\infty$ до $+\infty$, получаетъ, вслѣдствіе непрерывности, всевозможныя значенія и каждое только по одному разу и претерпѣвая разрывы въ моментъ достиженія аргументомъ полюсовъ тангенса. Теорема доказана.

263. Таблица измѣненій тангенса.—Предыдущая теорема приводитъ къ слѣдующей таблицѣ измѣненій тангенса.

аргу-ментъ.	a	...	$-\frac{5\pi}{2}$ -2π $-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$ $-\pi$ $-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ 0 $+\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}$ $+\pi$ $+\frac{3\pi}{2}$	$+\frac{3\pi}{2}$ $+2\pi$ $+\frac{5\pi}{2}$	...	b
$\operatorname{tang} x$	$\operatorname{tang} a$	...	$-\infty$ 0 $+\infty$ возрастаетъ	$-\infty$ 0 $+\infty$ возрастаетъ	$-\infty$ 0 $+\infty$ возрастаетъ	$-\infty$ 0 $+\infty$ возрастаетъ	$-\infty$ 0 $+\infty$ возрастаетъ	...	$\operatorname{tang} b$
произв. $\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 a}$	...	$+\infty$ 0 $+\infty$ положительная	$+\infty$ 0 $+\infty$ положительная	$+\infty$ 0 $+\infty$ положительная	$+\infty$ 0 $+\infty$ положительная	$+\infty$ 0 $+\infty$ положительная	...	$\frac{1}{\cos^2 b}$

Разсмотримъ двѣ какихъ-нибудь области:

$$\left[(2m+1)\frac{\pi}{2},\ (2m+3)\frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \left[(2p+1)\frac{\pi}{2},\ (2p+3)\frac{\pi}{2}\right],$$

на которыя разбита область (a, b). Въ первой области лежитъ одинъ корень тангенса, равный $m\pi$, во второй—одинъ корень тангенса, равный $p\pi$.

Разстоянія между границами этихъ областей равны между собою и равны π.

Принимая во вниманіе, что

$$\text{tang}(m\pi - \alpha) = \text{tang}(p\pi - \alpha) = -\text{tang}\,\alpha$$
$$\text{tang}(m\pi + \alpha) = \text{tang}(p\pi + \alpha) = +\text{tang}\,\alpha,$$

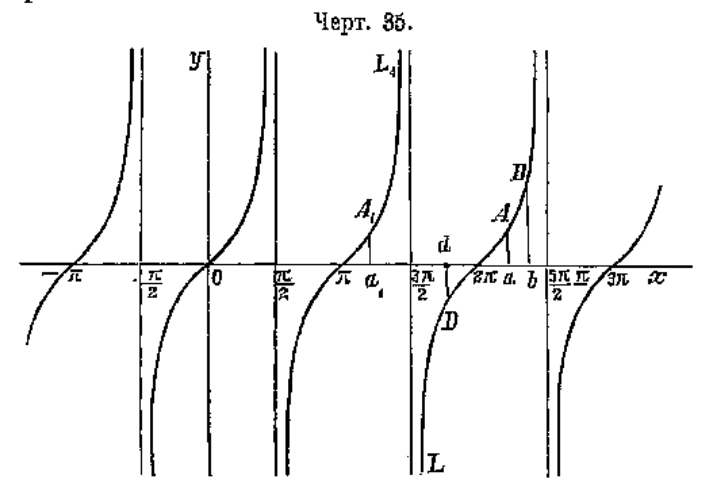
приходимъ къ слѣдующимъ замѣчаніямъ:

1°. Въ каждой области значенія тангенса, расположенныя по обѣимъ сторонамъ его значенія, равнаго нулю въ этой области и на одинаковомъ отъ него разстояніи, равны по модулю и противоположны по знаку.

2° Въ двухъ областяхъ значенія тангенсовъ, расположенныя по одну сторону отъ его значеній, равныхъ нулямъ въ этихъ областяхъ и на одинаковыхъ отъ нихъ разстояніяхъ, равны между собою.

Замѣчанія эти позволяютъ построить изображеніе тангенса такимъ образомъ:

Черт. 35.



На оси x-овъ откладываемъ абсциссы:

$$\ldots\quad \frac{5\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},\ +\frac{\pi}{2},\ +\frac{5\pi}{2},\ +\frac{5\pi}{2},\ \ldots,$$

представляющія полюсы тангенса, и проводимъ черезъ концы этихъ абсциссъ прямыя, параллельныя оси y-въ и называемыя *асимптотами* кривой, изображающей tang x.

Уравненія этихъ асимптотъ суть:

$$\ldots,\ x=-\frac{5\pi}{2},\ x=-\frac{3\pi}{2},\ x=-\frac{\pi}{2},\ x=+\frac{\pi}{2},\ x=+\frac{3\pi}{2},\ \ldots$$

Этими асимптотами вся плоскость раздѣлится на безконечное множество полосъ. Въ каждой полосѣ, напр. полосѣ, ограниченной асимптотами: $x=-\frac{\pi}{2}$ и $x=+\frac{\pi}{2}$, лежитъ кривая, изображающая $\operatorname{tang} x$ для той области аргумента, границы которой суть: $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. На основанiи замѣчанiя **2°** кривыя, лежащiя во всѣхъ полосахъ, будутъ совершенно одинаковы. Достаточно построить кривую для одной изъ полосъ. Возьмемъ, напр., полосу $\left(+\frac{3\pi}{2},\ +\frac{5\pi}{2}\right)$. Кривая, лежащая въ этой полосѣ, пересѣкаетъ одинъ разъ ось x-овъ въ точкѣ, абсцисса которой равна 2π. Она состоитъ изъ двухъ частей: та часть, точки которой имѣютъ положительныя ординаты, расположена въ сторону положительныхъ ординатъ и безгранично приближается къ ассимптотѣ $x=+\frac{5\pi}{2}$, встрѣчаясь съ нею на безконечно большомъ разстоянiи отъ оси x-овъ; вторая часть, точки которой имѣютъ отрицательныя ординаты, расположена въ сторону отрицательныхъ ординатъ и безгранично приближается къ асимптотѣ $x=+\frac{3\pi}{2}$, встрѣчаясь съ нею на безконечномъ разстоянiи отъ оси x-овъ. Обѣ части, на основанiи замѣчанiя **1°**, совершенно одинаковы.

Вообразивъ, что въ каждой изъ указанныхъ полосъ построена кривая, изображающая $\operatorname{tang} x$ для соотвѣтственной области, получимъ графическое изображенiе $\operatorname{tang} x$ для области $(-\infty,\ +\infty)$ въ видѣ безконечнаго множества совершенно одинаковыхъ вѣтвей

Предлагаемый чертежъ (35) представляетъ графическое изображенiе тангенса.

Для области (*Oa*, *Oв*), не содержащей полюса тангенса, тангенсъ изобразится конечною вѣтвью AB; для области (*Od*, *Oв*), не содержащей полюса, тангенсъ изобразится конечною вѣтвью DB; для области (Oa_1, *Od*), содержащей полюсъ $\frac{3\pi}{2}$, тангенсъ изобразится двумя безконечными вѣтвями: вѣтвью A_1L_1, лежащей въ полосѣ $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ и имѣющей асимптотою: $x=\frac{3\pi}{2}$, и вѣтвью DL, лежащею въ полосѣ $\left(\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}\right)$ и имѣющею ту же асимптоту.

264. Таблица измѣненiй котангенса.—Изъ опредѣленiй:

$$\operatorname{tang} x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad \operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

вытекаетъ:

$$\operatorname{cotg} x=\frac{1}{\operatorname{tang} x}.$$

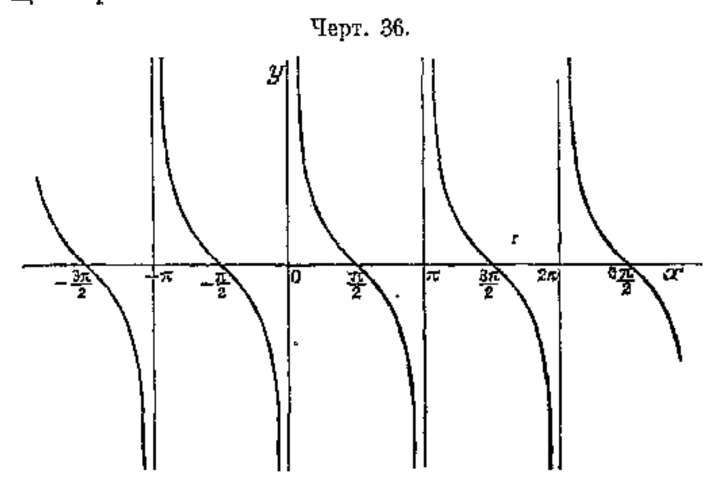
Равенство это говоритъ, что $\operatorname{cotg} x$ и $\operatorname{tang} x$, для одного и того же значенія аргумента, суть числа *взаимныя* [1]), а потому измѣненія котангенса при возрастаніи аргумента усматриваются непосредственно изъ измѣненій тангенса и представляются слѣдующею таблицею (см. таблицу на стр. 266).

Здѣсь область (a, b) разбита на частныя области полюсами котангенса, претерпѣвающаго разрывы при переходѣ аргумента черезъ эти полюсы.

Видимъ, что *котангенсъ находится въ состояніи постояннаго* **убыванія**, при чемъ *его производная* $\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ *постоянно отрицательная*, т.-е. **сохраняетъ свой знакъ.**

Графическое изображеніе измѣненій котангенса представится слѣдующею кривою.

Черт. 36.



Асимптотами служатъ прямыя, параллельныя оси y-овъ:

$$\ldots x = -2\pi, \quad x = -\pi, \quad x = 0, \quad x = \pi, \quad x = 2\pi, \ldots$$

Онѣ раздѣляетъ всю плоскость на безконечное множество полосъ. Въ каждой полосѣ лежитъ вѣтвь кривой. Число вѣтвей безгранично велико, и всѣ онѣ совершенно одинаковы.

265. Таблица измѣненій секанса.—Равенство:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

представляющее опредѣленіе секанса, говоритъ, что $\sec x$ и $\cos x$, для одного и того же значенія аргумента, суть числа *взаимныя*, а потому измѣненія секанса при возрастаніи аргумента усматриваются непосредственно изъ измѣненій косинуса и представляются слѣдующею таблицею (см. таблицу на стр. 267).

[1]) Два числа называются *взаимными*, если произведеніе ихъ равно 1

аргументъ.	a	...	$-2\pi \quad -\frac{3\pi}{2} \quad -\pi$	$-\pi \quad -\frac{\pi}{2} \quad 0$	$0 \quad +\frac{\pi}{2} \quad +\pi$	$+\pi \quad +\frac{3\pi}{2} \quad +2\pi$	...	b
$\mathrm{cotg}\, x$	$\mathrm{cotg}\, a$	...	$+\infty \quad 0 \quad -\infty$ убываетъ	$+\infty \quad 0 \quad -\infty$ убываетъ	$+\infty \quad 0 \quad -\infty$ убываетъ	$+\infty \quad 0 \quad -\infty$ убываетъ	...	$\mathrm{cotg}\, b$
произ. $-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 a}$	...	$-\infty \quad -1 \quad -\infty$ отрицательная	$-\infty \quad -1 \quad -\infty$ отрицательная	$-\infty \quad -1 \quad -\infty$ отрицатеельная	$-\infty \quad -1 \quad -\infty$ отрицательная	...	$-\frac{1}{\sin^2 b}$

аргу-ментъ.	a	$\dots$	$-2\pi \quad -\frac{3\pi}{2} \quad -\pi$	$-\pi \quad -\frac{\pi}{2} \quad 0$	$0 \quad +\frac{\pi}{2} \quad +\pi$	$+\pi \quad +\frac{3\pi}{2} \quad +2\pi$	$\dots$	b
$\sec x$	$\sec a$	$\dots$	$+1 \quad \pm\infty \quad -1$ возрастаетъ	$-1 \quad \mp\infty \quad +1$ убываетъ	$+1 \quad \pm\infty \quad -1$ возрастаетъ	$-1 \quad \mp\infty \quad +1$ убываетъ	$\dots$	$\sec b$
произ. $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\frac{\sin a}{\cos^2 a}$		$0 \quad +\infty \quad 0$ положительная	$0 \quad -\infty \quad 0$ отрицательная	$0 \quad +\infty \quad 0$ положительная	$0 \quad -\infty \quad 0$ отрицательная		$\frac{\sin b}{\cos^2 b}$

Разсматривая эту таблицу, видимъ: 1°. Секансъ мѣняетъ последовательно состояніе возрастанія (убыванія) на состояніе убыванія (возрастанія), возрастая (убывая) въ области, границы которой суть послѣдовательные корни синуса: $k\pi$ и $(k+1)\pi$, гдѣ k четное (нечетное), причемъ производная, равная $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, въ этой области положительная (отрицательная). Онъ претерпѣваетъ въ каждой изъ указанныхъ областей разрывъ при значеніи аргумента, равномъ корню косинуса, лежащему въ этой области.

2°. Въ каждой изъ указанныхъ областей секансъ, не принимая значеній, заключенныхъ между (-1) и $(+1)$, принимаетъ, вслѣдствіе непрерывности, всѣ остальныя и *каждое только по одному разу* вслѣдствіе возрастанія (убыванія).

3°. Обладаетъ maximum'ами, равными (-1), которыхъ достигаетъ при переходѣ аргумента черезъ значенія, равныя корнямъ синуса: $k\pi$, гдѣ k нечетное, причемъ *производная при этихъ значеніяхъ переходитъ изъ положительнаго состоянія въ отрицательное* (мѣняетъ знакъ $+$ *на* $-$), *обращаясь въ нуль.*

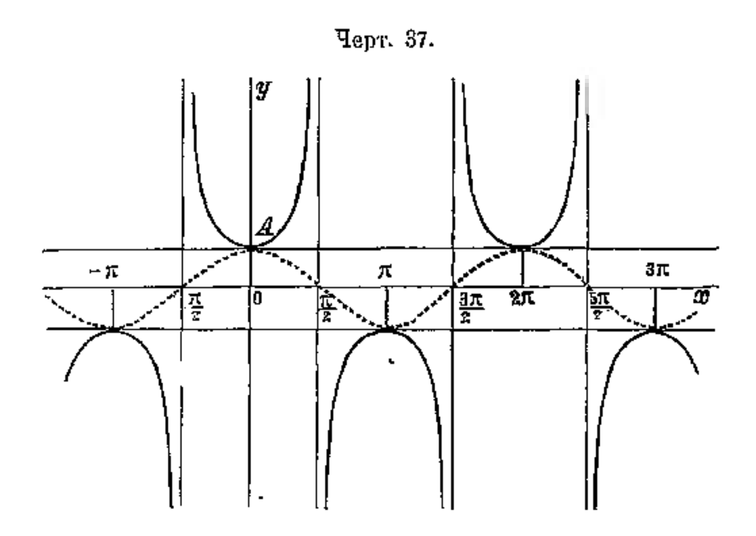
4°. Обладаетъ minimum'ами, равными $(+1)$, которыхъ достигаетъ при переходѣ аргумента черезъ корни синуса $k\pi$, гдѣ k четное, причемъ *производная при этихъ значеніяхъ переходитъ изъ отрицательнаго состоянія въ положительное* (мѣняетъ знакъ $-$ *на* $+$), *обращаясь въ нуль.*

Для построенія кривой, изображающей $\sec x$, разобьемъ область (a, b) на частныя области, границами которыхъ были бы послѣдовательные полюсы секанса. Предыдущая таблица приметъ видъ:

аргу-ментъ.	a	...	$-\frac{5\pi}{2}$	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}$	$+\pi$	$+\frac{3\pi}{2}$	$+\frac{3\pi}{2}$	$+2\pi$	$+\frac{5\pi}{2}$	...	b
$\sec x$	$\sec a$		$+\infty$	$+1$	$+\infty$	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$	$+1$	$+\infty$		$\sec b$
				(minimum)			(maximum)			(minimum)			(maximum)			(minimum)			
				положительный			отрицательный			положительный			отрицательный			положительный			

Въ соотвѣтствіе съ этою таблицею $\sec x$ изобразится кривою, указанною на черт. (37). Пунктиромъ представлена кривая, изображающая $\cos x$.

Черт. 37.



266. Таблица измѣненій косеканса.—Равенство:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

представляющее опредѣленіе косеканса, говоритъ, что $\operatorname{cosec} x$ и $\sin x$ суть, для одного и того же значенія аргумента, числа *взаимныя*, а потому измѣненія косеканса, при возрастаніи аргумента, усматриваются непосредственно изъ измѣненій синуса и представляются таблицею, помѣщенною на стр. 271.

Разсматривая эту таблицу, видимъ:

1°. Косекансъ мѣняетъ послѣдовательно состояніе возрастанія (убыванія) на состояніе убыванія (возрастанія), возрастая (убывая) въ области, границы которой суть послѣдовательные корни косинуса: $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ и $(2k+3)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k четное (нечетное), причемъ производная, равная $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, въ этой области положительная (отрицательная). Онъ претерпѣваетъ въ каждой изъ указанныхъ областей разрывъ при значеніи аргумента, равномъ корню синуса, заключенному въ этой области.

2°. Въ каждой изъ указанныхъ областей, не принимая значеній, заключенныхъ между (-1) и $(+1)$, принимаетъ, вслѣдствіе непрерывности, всѣ остальныя и каждое только по одному разу вслѣдствіе возрастанія (убыванія).

аргументъ.	a	$\dots -\frac{5\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{2}$ -2π $-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$ $-\pi$ $-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ 0 $+\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}$ $+\pi$ $+\frac{3\pi}{2}$	$+\frac{3\pi}{2}$ $+2\pi$ $+\frac{5\pi}{2}$	$+\frac{5\pi}{2}\dots$	b
$\operatorname{cosec} x$	$\operatorname{cosec} a$	$\dots -1$	-1 $\mp\infty$ $+1$ убываетъ	$+1$ $\pm\infty$ -1 возрастаетъ	-1 $\mp\infty$ 1 убываетъ	1 $\pm\infty$ -1 возрастаетъ	-1 $\mp\infty$ 1 убываетъ	$1\dots$	$\operatorname{cosec} b$
произв. $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$	$\dots$	0 $-\infty$ 0 отрицательная	0 $+\infty$ 0 положительная	0 $-\infty$ 0 отрицательная	0 $+\infty$ 0 положительная	0 $-\infty$ 0 отрицательная	$\dots$	$-\frac{\cos b}{\sin^2 b}$

3°. Обладѣетъ maximum'ами, равными (—1), которыхъ достигаетъ при переходѣ аргумента черезъ значенія, равныя корнямъ косинуса: $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k нечетное, причемъ *производная при этихъ значеніяхъ переходитъ изъ положительнаго состоянія въ отрицательное* (мѣняетъ знакъ + *на* —), *обращаясь въ нуль.*

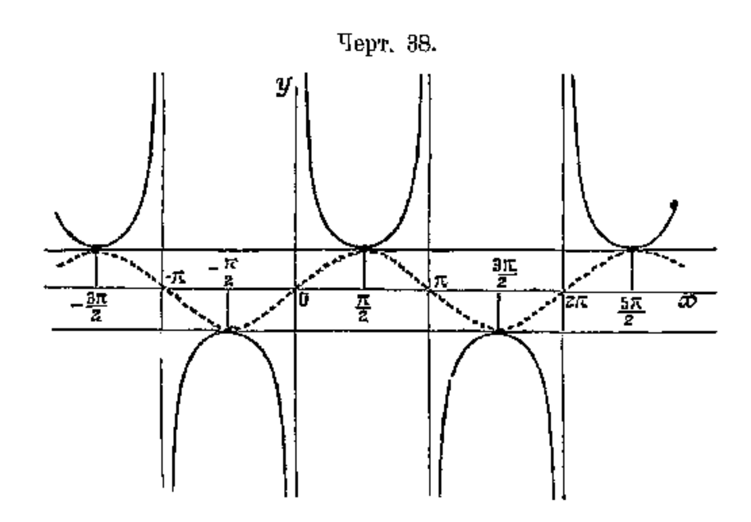
4°. Обладаетъ minimum'ами, равными (+1), которыхъ достигаетъ при переходѣ аргумента черезъ значенія, равныя корнямъ косинуса: $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k четное, причемъ *производная при этихъ значеніяхъ переходитъ изъ отрицательнаго состоянія въ положительное* (мѣняетъ знакъ — *на* +), *обращаясь въ нуль.*

Для построенія кривой, изображающей cosec$x$, разобьемъ область (a, b) на частныя области, границами которыхъ были бы послѣдовательные полюсы косеканса.

Предыдущая таблица приметъ видъ, помѣщенный на стр. 273.

Въ соотвѣтствіе съ этою таблицею cosec$x$ изобразится кривою, указанною на черт. (38), гдѣ пунктиромъ представлена кривая, изображающая sin$x$.

Черт. 38.



267. Значенія тригонометрическихъ функцій при значеніяхъ аргумента, равныхъ ±∞. — *Значеніемъ функціи $f(x)$ при значеніи аргумента, равномъ ±∞, называется тотъ предѣлъ, къ которому стремится $f(x)$, когда x безгранично возрастаетъ.*

Если этотъ предѣлъ существуетъ, то онъ означается символомъ: $f(\pm\infty)$.

Примѣры. 1°. Для функціи $f(x)=e^x$ имѣемъ: $f(-\infty)=0$, причемъ $f(+\infty)$ не существуетъ, ибо значенія этой функціи, при

аргу-мент.	a	...	-2π $-\frac{3\pi}{2}$ $-\pi$	$-\pi$ $-\frac{\pi}{2}$ 0	0 $+\frac{\pi}{2}$ $+\pi$	$+\pi$ $+\frac{3\pi}{2}$ $+2\pi$	$+2\pi$ $+\frac{5\pi}{2}$ $+3\pi$	...	b	
cosec$x$	cosec$a$		$+\infty$ $+1$ $+\infty$ положительный	$-\infty$ -1 $-\infty$ отрицательный	$+\infty$ 1 $+\infty$ положительный	$-\infty$ -1 $-\infty$ отрицательный	$+\infty$ 1 $+\infty$ положительный			

безграничномъ возрастанiи x, безгранично возрастаютъ, хотя можно писать: $f(+\infty) = +\infty$.

2°. Для функцiи $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ имѣемъ: $f(\pm\infty) = e^{-0} = 1$.

3°. Для функцiи $f(x) = \frac{1}{x}$ имѣемъ. $f(\pm\infty) = 0$.

4°. Для функцiи $f(x) = \frac{x^2+1}{3x^2-5x} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{5}{x}}$ имѣемъ: $f(\pm\infty) = \frac{1}{3}$.

5°. Для функцiи $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ имѣемъ $f(+\infty) = 0$, $f(-\infty) = 1$.

Для тригонометрическихъ функцiй этого предѣла не существуетъ, ибо каждая изъ этихъ функцiй, при безграничномъ возрастанiи x, будетъ, какъ видѣли, колебаться между одними и тѣми же границами. Такъ, синусъ будетъ колебаться отъ -1 до $+1$, и обратно, тангенсъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, и обратно, и т. д.

Отсюда слѣдуетъ, что *символы:*

$$\sin(\pm\infty), \qquad \cos(\pm\infty), \qquad \operatorname{tang}(\pm\infty), \ \ldots$$

не имѣютъ опредѣленнаго смысла.

268. Перiодичность тригонометрическихъ функцiй.—1°. Видѣли, что, по опредѣленiю функцiй: синусъ, косинусъ, секансъ и косекансъ, онѣ обладаютъ *положительнымъ* **перiодомъ**, равнымъ числу 2π, и *отрицательнымъ* **перiодомъ**, равнымъ числу (-2π).

Покажемъ, что *эти функцiи* **не** *обладаютъ положительнымъ перiодомъ, меньшимъ числа* 2π, *и отрицательнымъ перiодомъ, модуль котораго былъ бы менѣе* 2π.

И въ самомъ дѣлѣ, назовемъ буквами a и b соотвѣтственно перiоды синуса и косинуса.

При всякомъ x должны имѣть:

$$\sin(x+a) = \sin x, \quad \text{откуда:} \quad \sin(x+a) - \sin x = 0,$$

и

$$\cos(x+b) = \cos x, \quad \text{откуда:} \quad \cos(x+b) - \cos x = 0.$$

Преобразовавъ разности, помѣщенныя въ лѣвыхъ частяхъ этихъ равенствъ, соотвѣтственно получимъ:

$$\sin\frac{a}{2}\cos\left(x+\frac{a}{2}\right)=0 \quad \text{и} \quad \sin\frac{b}{2}\sin\left(x+\frac{b}{2}\right)=0.$$

Каждое изъ этихъ равенствъ распадается соотвѣтственно на два:

$$\sin\frac{a}{2}=0, \qquad \cos\left(x+\frac{a}{2}\right)=0$$

и

$$\sin\frac{b}{2}=0, \qquad \sin\left(x+\frac{b}{2}\right)=0.$$

Равенства эти даютъ *всѣ* значенія для a и b, которыя суть (**201**):

$$\frac{a}{2}=k\pi, \quad \frac{b}{2}=k\pi, \quad x+\frac{a}{2}=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad x+\frac{b}{2}=k\pi,$$

гдѣ k произвольное цѣлое, откуда:

$$\begin{aligned} a &= 2k\pi, & b &= 2k\pi, \\ a &= (2k+1)\pi - 2x, & b &= 2k\pi - x. \end{aligned}$$

Послѣднія значенія для a и b не суть періоды, ибо они, какъ видно, суть функціи x и, слѣдовательно, съ измѣненіемъ x измѣняютъ значенія.

Первыя же два значенія для a и b, т.-е.

$$a=2k\pi, \qquad b=2k\pi,$$

суть періоды, ибо они не зависятъ отъ x.

Итакъ, слѣдовательно, синусъ и косинусъ не могутъ имѣть періодовъ, отличныхъ отъ чиселъ, заключенныхъ въ формулѣ: $2k\pi$. Наименьшее положительное число, за исключеніемъ нуля, заключенное въ ней, есть 2π и наименьшее, по модулю, отрицательное число есть (-2π), **что и требовалось показать.**

То же предложеніе имѣетъ мѣсто для секанса и косеканса, ибо

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

и, слѣдовательно, значенія секанса (косеканса) равны только для такихъ значеній аргумента, для которыхъ равны значенія косинуса (синуса).

2°. Видѣли, что тангенсъ и котангенсъ обладаютъ положительнымъ періодомъ, равнымъ числу π, и отрицательнымъ періодомъ, равнымъ числу $(-\pi)$.

Покажемъ, что эти *функціи* **не** *обладаютъ положительнымъ періодомъ, меньшимъ числа* π, *и отрицательнымъ періодомъ, модуль котораго былъ бы менье* π.

И въ самомъ дѣлѣ, назовемъ буквами a и b соотвѣтственно періоды тангенса и котангенса.

При всякомъ x должны имѣть:

$$\operatorname{tang}(x+a) = \operatorname{tang} x, \quad \text{откуда:} \quad \operatorname{tang}(x+a) - \operatorname{tang} x = 0.$$
$$\operatorname{cotg}(x+a) = \operatorname{cotg} x, \quad \text{откуда:} \quad \operatorname{cotg}(x+a) - \operatorname{cotg} x = 0.$$

Преобразовавъ лѣвыя части этихъ равенствъ (**244**), соотвѣтственно получимъ:

$$\frac{\sin a}{\cos x \cos(x+a)} = 0, \qquad -\frac{\sin a}{\sin x \sin(x+a)} = 0$$

Равенства эти равносильны равенству: $\sin a = 0$, дающему:

$$a = k\pi.$$

Значеніе это есть періодъ, ибо оно не зависитъ отъ x.

Итакъ, слѣдовательно, тангенсъ и котангенсъ не могутъ имѣть періодовъ, отличныхъ отъ чиселъ, заключенныхъ въ формулѣ $k\pi$. Наименьшее положительное число, за исключеніемъ нуля, заключенное въ ней, есть π, а наименьшее, по модулю, отрицательное число есть $(-\pi)$, что и требовалось показать.

Распредѣливъ всѣ значенія аргумента по тригонометрическимъ квадрантамъ (**215**), получимъ слѣдующую таблицу:

x	1-й тригонометрическій квадрантъ.	2-й тригонометрическій квадрантъ.	3-й тригонометрическій квадрантъ.	4-й тригонометрическій квадрантъ.
sin	$0 \quad \ldots \quad +1$ положительн., возрастаетъ	$+1 \quad \ldots \quad 0$ положительн., убываетъ	$0 \quad \ldots \quad -1$ отрицательн., убываетъ	$-1 \quad \ldots \quad 0$ отрицательн., возрастаетъ
cos	$+1 \quad \ldots \quad 0$ положительн., убываетъ	$0 \quad \ldots \quad -1$ отрицательн., убываетъ	$-1 \quad \ldots \quad 0$ отрицательн., возрастаетъ	$0 \quad \ldots \quad +1$ положительн., возрастаетъ
tang	$0 \quad \ldots \quad +\infty$ положительн., возрастаетъ	$-\infty \quad \ldots \quad 0$ отрицательн., возрастаетъ	$0 \quad \ldots \quad +\infty$ положительн., возрастаетъ	$-\infty \quad \ldots \quad 0$ отрицательн., возрастаетъ
cotg	$+\infty \quad \ldots \quad 0$ положительн., убываетъ	$0 \quad \ldots \quad -\infty$ отрицательн., убываетъ	$+\infty \quad \ldots \quad 0$ положительн., убываетъ	$0 \quad \ldots \quad -\infty$ отрицательн., убываетъ
sec	$+1 \quad \ldots \quad +\infty$ положительн., возрастаетъ	$-\infty \quad \ldots \quad -1$ отрицательн., возрастаетъ	$-1 \quad \ldots \quad -\infty$ отрицательн., убываетъ	$+\infty \quad \ldots \quad +1$ положительн., убываетъ
cosec	$+\infty \quad \ldots \quad +1$ положительн., убываетъ	$+1 \quad \ldots \quad +\infty$ положительн., возрастаетъ	$-\infty \quad \ldots \quad -1$ отрицательн., возрастаетъ	$-1 \quad \ldots \quad -\infty$ отрицательн., убываетъ

§ VI. Значенія аргумента, соотвѣтствующія данному значенію тригонометрической функціи

269. Замѣчаніе. — Въ алгебрѣ имѣли примѣръ функціи, данному значенію которой отвѣчаетъ *нѣсколько* значеній аргумента. Функція эта есть степень: x^n. И въ самомъ дѣлѣ, значенію функціи: x^2, равному, напр., 4, отвѣчаютъ два значенія аргумента: $+2$ и -2. Каждая изъ тригонометрическихъ функцій такова, что каждому значенію ея, которое она способна принимать, отвѣчаетъ безчисленное множество значеній аргумента. Всѣ эти значенія, какъ сейчасъ увидимъ, заключены, для каждой функціи, въ одной формулѣ, такъ что, зная одно изъ нихъ, будемъ знать и всѣ остальныя. Причина этому лежитъ въ періодичности тригонометрическихъ функцій.

270. Теорема. 1°. *Всѣ числа, имѣющія одинъ и тотъ же синусъ (косекансъ), заключены въ формулѣ:*

$$(-1)^n \alpha + n\pi, \qquad [21]$$

гдѣ *α есть одно изъ нихъ, принадлежащее области, заключенной между послѣдовательными корнями косинуса.*

2°. *Всѣ числа, имѣющія одинъ и тотъ же косинусъ (секансъ), заключены въ формулѣ:*

$$\pm\alpha + 2n\pi, \qquad [22]$$

гдѣ *α есть одно изъ нихъ, принадлежащее области, заключенной между послѣдовательными корнями синуса.*

3°. *Всѣ числа, имѣющія одинъ и тотъ же тангенсъ (котангенсъ), заключены въ формулѣ:*

$$\alpha + n\pi, \qquad [23]$$

гдѣ *α есть одно изъ нихъ, принадлежащее области, заключенной: для тангенса — между двумя послѣдовательными корнями косинуса и для котангенса — между двумя послѣдовательными корнями синуса.*

Число n есть произвольное цѣлое.

1°. Положимъ, что данное число ω, положительное или отрицательное, таково:

$$|\omega| \leqslant 1, \qquad [|\omega| \geqslant 1].$$

Синусъ [косекансъ], какъ извѣстно, можетъ имѣть это значеніе, и этому значенію въ каждой области аргумента, ограниченной двумя послѣдовательными корнями косинуса, отвѣчаетъ, какъ извѣстно (**258, 266**), одно и только одно значеніе этого аргумента. Такъ

какъ такихъ областей безграничное множество, то и число значеній аргумента, отвѣчающихъ данному значенію ω синуса [косеканса], безгранично велико. Назовемъ каждое изъ этихъ значеній буквою a. Возьмемъ одно изъ нихъ, напр., изъ области $\left(-\frac{\pi}{2},\ +\frac{\pi}{2}\right)$. Выбираемъ эту область по двумъ причинамъ: во-первыхъ, границы ея— наименьшія по модулю, и, во-вторыхъ, косинусъ (секансъ) въ этой области положительный.

Обозначимъ это значеніе буквою α и выразимъ a черезъ α. По условію имѣемъ:

$\sin a = \sin\alpha$, $[\operatorname{cosec} a = \operatorname{cosec}\alpha$, или, равносильно, $\sin a = \sin\alpha]$,

откуда

$$\sin a - \sin\alpha = 0.$$

Равенство это и послужитъ для выраженія a черезъ α.

И въ самомъ дѣлѣ, преобразовавъ лѣвую часть (**240**), получимъ:

$$\sin\frac{a-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{a+\alpha}{2} = 0.$$

Равенство это распадается на два уравненія:

$$\sin\frac{a-\alpha}{2} = 0, \qquad \cos\frac{a+\alpha}{2} = 0,$$

которыя говорятъ: нѣкоторыя a таковы, что $\frac{a-\alpha}{2}$ представляютъ всѣ корни синуса, а нѣкоторыя a таковы, что $\frac{a+\alpha}{2}$ представляютъ всѣ корни косинуса, а потому первыя a удовлетворяютъ уравненію: $\frac{a-\alpha}{2} = k\pi$, а вторыя — уравненію: $\frac{a+\alpha}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, гдѣ k произвольное цѣлое. Уравненія эти даютъ:

$$a = 2k\pi + \alpha, \qquad a = (2k+1)\pi - \alpha.$$

Итакъ всѣ значенія a заключены въ двухъ формулахъ, которыя, однако, могутъ быть соединены въ одну:

$$a = (-1)^n\alpha + n\pi,$$

гдѣ n произвольное цѣлое, ибо при n четномъ $= 2k$ получаемъ первую формулу, при n нечетномъ $= 2k+1$ получаемъ вторую. Что и требовалось доказать.

Примеры. — 1. Если $\omega = \frac{1}{2}$, то $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и

$$a = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

2. Если $\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, и

$$a = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{3} + n\pi.$$

2°. Положимъ, что данное число ω, положительное или отрицательное, таково:

$$|\omega| \leqslant 1, \qquad [|\omega| \geqslant 1].$$

Косинусъ [секансъ], какъ извѣстно, можетъ имѣть это значенiе, и этому значенiю въ каждой области аргумента, ограниченной двумя послѣдовательными корнями синуса, отвѣчаетъ, какъ извѣстно (**260**, **265**), одно и только одно значенiе этого аргумента. Такъ какъ такихъ областей безграничное множество, то и число значенiй аргумента, отвѣчающихъ данному значенiю косинуса (секанса), безгранично велико. Назовемъ каждое изъ нихъ буквою a. Возьмемъ одно изъ нихъ, напр. изъ области $(0, \pi)$.

Выбираемъ эту область по двумъ причинамъ: во-первыхъ, границы ея — положительныя и наименьшiя по модулю, и, во-вторыхъ, синусъ (косекансъ) въ этой области положительный. Обозначимъ это значенiе буквою α и выразимъ a черезъ α. По условiю имѣемъ:

$$\cos a = \cos\alpha, \quad [\sec a = \sec\alpha, \text{ или, равносильно, } \cos a = \cos\alpha],$$

откуда:

$$\cos a - \cos\alpha = 0.$$

Преобразовавъ лѣвую часть (**240**), найдемъ:

$$\sin\frac{a-\alpha}{2} = 0, \quad \sin\frac{a+\alpha}{2} = 0.$$

Равенства эти говорятъ: нѣкоторыя a таковы, что $\frac{a-\alpha}{2}$ представляютъ всѣ корни синуса, а нѣкоторыя таковы, что $\frac{a+\alpha}{2}$ представляютъ всѣ корни того же синуса, а потому первыя a'

удовлетворяютъ уравненію. $\frac{a-\alpha}{2}=k\pi$, а вторыя — уравненію: $\frac{a+\alpha}{2}=k\pi$. Уравненія эти даютъ:

$$a=\alpha+2k\pi, \qquad a=-\alpha+2k\pi.$$

Итакъ, всѣ значенія a заключены въ двухъ формулахъ, которыя, однако, могутъ быть соединены въ одну

$$a=\pm\alpha+2n\pi,$$

гдѣ n произвольное цѣлое. Что и требовалось доказать.

Примѣры. — 1. Если $\omega=\frac{1}{2}$, то $\alpha=\frac{\pi}{3}$, и

$$a=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi.$$

2. Если $\omega=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\alpha=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$, и

$$a=\pm\frac{5\pi}{6}+2n\pi.$$

3°. Тангенсъ (котангенсъ) можетъ имѣть всякое данное значеніе ω. Этому значенію въ каждой области аргумента, ограниченной двумя послѣдовательными корнями косинуса [корнями синуса], отвѣчаетъ одно и только одно значеніе этого аргумента. Такъ какъ такихъ областей безграничное множество, то и число значеній аргумента, отвѣчающихъ данному значенію тангенса (котангенса) безгранично велико. Назовемъ каждое изъ нихъ буквою a. Возьмемъ одно изъ нихъ, напр. въ области $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ для тангенса и въ области $(0, \pi)$ для котангенса. Обозначимъ это значеніе буквою α и выразимъ a черезъ α. По условію имѣемъ

$\operatorname{tang}a=\operatorname{tang}\alpha$, $[\operatorname{cotg}a=\operatorname{cotg}\alpha$, или, равносильно, $\operatorname{tang}a=\operatorname{tang}\alpha]$,

откуда:

$$\operatorname{tang}a-\operatorname{tang}\alpha=0.$$

Преобразовавъ лѣвую часть, получимъ:

$$\frac{\sin(a-\alpha)}{\cos a\cos\alpha}=0, \text{ или, равносильно, } \sin(a-\alpha)=0.$$

Равенство это говоритъ, что $(a - \alpha)$ представляютъ всѣ корни синуса, т.-е.

$$a - \alpha = n\pi, \quad \text{откуда} \quad a = \alpha + n\pi,$$

что и требовалось доказать.

Примѣры. — 1. Если $\omega = 1$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$, и

$$a = \frac{\pi}{4} + n\pi.$$

2. Если $\omega = -1$, то $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, и

$$a = -\frac{\pi}{4} + n\pi.$$

271. Замѣчаніе 1. — Замѣтимъ, что *числа α, фигурирующія въ предыдущей теоремѣ, могутъ быть взяты и изъ другихъ областей аргумента.*

272. Замѣчаніе 2. — *Если два числа r и s удовлетворяютъ равенству:*

$$r^2 + s^2 = 1,$$

то они суть, соотвѣтственно, синусъ и косинусъ одного и того же числа α.

И въ самомъ дѣлѣ, условіе даетъ: $|r| \leqslant 1$, $|s| \leqslant 1$.

Извѣстно, что существуетъ такое число β, синусъ коего равенъ r, такъ что:

$$r = \sin\beta = \sin(\pi - \beta).$$

Это число β имѣетъ косинусъ, который назовемъ буквою t, такъ что

$$t = \cos\beta = -\cos(\pi - \beta).$$

Имѣли:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = r^2 + t^2 = 1;$$

съ другой стороны, по условію,

$$r^2 + s^2 = 1.$$

Отсюда:

$$r^2 + t^2 = r^2 + s^2, \quad \text{или} \quad s^2 = t^2.$$

Равенство это даетъ:

$$s = t, \quad \text{или} \quad s = -t.$$

Первое изъ этихъ равенствъ показываетъ, что $s = \cos\beta$, и, слѣдовательно, r и s суть синусъ и косинусъ одного и того же числа β, что и хотѣли показать.

Второе равенство говоритъ, что $s = \cos(\pi - \beta)$, и, слѣдовательно, r и s суть соотвѣтственно синусъ и косинусъ одного и того же числа $(\pi - \beta)$, что и хотѣли показать.

Итакъ, число α существуетъ.

Покажемъ теперь, что *всѣ числа, имѣющія синусами и косинусами, соотвѣтственно, числа* r *и* s, *заключены въ формулѣ:*

$$\alpha + 2k\pi,$$

гдѣ k *произвольное цѣлое.*

И въ самомъ дѣлѣ, числа эти, имѣющія синусомъ число r, заключены въ формулѣ:

$$(-1)^n \alpha + n\pi.$$

Съ другой стороны, они, имѣя косинусомъ число t, заключены въ формулѣ:

$$\pm \alpha + 2n\pi.$$

Ясно, что тѣ числа, и только тѣ, заключены въ обѣихъ формулахъ совмѣстно, которыя заключены въ формулѣ:

$$\alpha + 2k\pi,$$

что и хотѣли показать.

§ VII. Алгебраическія соотношенія между тригонометрическими функціями при одномъ и томъ же значеніи аргумента.

273. Теорема. *Алгебраическія соотношенія:*

$$[T] \qquad \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \\ \operatorname{tang} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}, \\ \sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}, \end{array} \right.$$

существующія между шестью тригонометрическими функціями при одномъ и томъ же значеніи аргумента, или, что то же, между

шестью тригонометрическими элементами одного и того же числа, суть независимыя другъ отъ друга уравненія, причемъ всякое соотношеніе между тригонометрическими элементами числа x, отличное отъ уравненій **[T]**, *есть слѣдствіе этихъ уравненій.*

Хотя въ первой части этого курса теорема эта была доказана, но находимъ нелишнимъ повторить доказательство.

1°. *Уравненія* [T] *независимы другъ отъ друга.* И въ самомъ дѣлѣ, первое уравненіе содержитъ только $\sin x$ и $\cos x$; каждое же изъ остальныхъ четырехъ уравненій системы содержитъ элементъ, не входящій въ другія три уравнавія.

2°. *Не можетъ существовать алгебраическаго соотношенія между тригонометрическими элементами числа x, которое не было бы слѣдствіемъ уравненій системы* **[T]**. Предположимъ обратное, т.-е. предположимъ, что существуетъ уравненіе [R], отличное отъ уравненій системы [T] и не представляющее слѣдствія этихъ уравненій.

Выразивъ, при помощи уравненій [T], пять элементовъ въ шестомъ, напр. $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ въ $\cos x$, и внеся ихъ выраженія въ уравненіе [R], получимъ, по предположенію, *не тождество*, а *алгебраическое уравненіе* относительно $\cos x$, существующее при всякомъ x, т.-е. алгебраическое уравненіе, которому удовлетворяетъ всякое число, модуль котораго менѣе или равенъ 1, подставленное вмѣсто $\cos x$.

Итакъ, уравненіе [R] будетъ имѣть безчисленное множество корней, что невозможно [1]).

274. Иныя соотношенія между тригонометрическими элементами одного и того же числа. Въ первой части этого курса были выведены, изъ основныхъ соотношеній [T], другія соотношенія, часто употребляемыя. Перечислимъ ихъ.

1°. Соотношеніе:

$$\operatorname{tang} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1, \qquad [24]$$

полученное черезъ умноженіе уравненій второго и третьяго.

2°. Соотношеніе:

$$1 + \operatorname{tang}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \qquad [25]$$

полученное при помощи перваго, второго и пятаго уравненій.

3°. Соотношеніе:

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x, \qquad [26]$$

полученное при помощи перваго, третьяго и шестого уравненій.

---

[1]) См. *Н. Билибинъ.* Алгебра. Изд. 4-е. Стр. 426.

Замѣтимъ, что каждое изъ полученныхъ сейчасъ уравненій можетъ замѣнить одно изъ тѣхъ уравненій системы [T], которое участвовало въ образованіи этого полученнаго уравненія. Такъ, напр., уравненіе [25] можетъ замѣнить или первое, или второе, или пятое уравненія. Новая система будетъ система независимыхъ уравненій, равносильная *системѣ* [T] [1]).

275. Выраженія тригонометрическихъ элементовъ числа черезъ одинъ изъ нихъ.—Система [T] позволяетъ рѣшить вопросъ.

Выразить всѣ тригонометрическія функціи черезъ одну изъ нихъ. И въ самомъ дѣлѣ, принявъ въ системѣ [T] одну изъ функцій за *извѣстное*, а остальныя пять — за *неизвѣстныя*, получимъ систему *пяти независимыхъ алгебраическихъ уравненій съ пятью неизвѣстными*. Рѣшивъ ее, и выразимъ пять функцій, принятыхъ за неизвѣстныя, въ шестой, разсмотрѣнной, какъ извѣстное.

276. Задача. *Выразить всѣ функціи въ косинусъ.* Первое изъ уравненій [T] даетъ:

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}.$$

Внося это выраженіе въ остальныя, получимъ:

$$\operatorname{tang} x = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}.$$

Двойные знаки въ этихъ формулахъ соотвѣтствуютъ другъ другу, причемъ присутствіе ихъ объясняется слѣдующимъ образомъ: *полученныя формулы*, по смыслу заданія, *опредѣляютъ значенія тригонометрическихъ функцій:*

$$\sin x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \operatorname{cotg} x, \quad \sec x, \quad \operatorname{cosec} x$$

не по данному значенію аргумента x, а по данному значенію $\cos x$, *которому соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній аргумента* (**270, 2°**), *слѣдовательно, эти формулы опредѣляютъ значенія указанныхъ тригонометрическихъ функцій не для одного опредѣленнаго значенія x, а для безчисленнаго множества этихъ значеній, имѣющихъ одинъ и тотъ же косинусъ.*

Назвавъ одно изъ нихъ буквою α, получимъ для всѣхъ остальныхъ (**270, 2°**):

$$x = \pm\alpha + 2k\pi.$$

---

[1]) См. *Н. Билибинъ*. Алгебра. Изд. 4-е. Стр. 141.

Предыдущія формулы опредѣляютъ, слѣдовательно, значенія:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin(\pm\alpha + 2k\pi) = \sin(\pm\alpha) = \pm\sin\alpha,\\
\operatorname{tang} x &= \operatorname{tang}(\pm\alpha + 2k\pi) = \operatorname{tang}(\pm\alpha) = \pm\operatorname{tang}\alpha,\\
\operatorname{cotg} x &= \operatorname{cotg}(\pm\alpha + 2k\pi) = \operatorname{cotg}(\pm\alpha) = \pm\operatorname{cotg}\alpha,\\
\sec x &= \sec(\pm\alpha + 2k\pi) = \sec(\pm\alpha) = \sec\alpha,\\
\operatorname{cosec} x &= \operatorname{cosec}(\pm\alpha + 2k\pi) = \operatorname{cosec}(\pm\alpha) = \pm\operatorname{cosec}\alpha,
\end{aligned}$$

которыя, какъ видимъ, приводятся для синуса, тангенса, котангенса и косеканса къ двумъ значеніямъ, а именно, соотвѣтственно, къ значеніямъ: $\pm\sin\alpha$, $\pm\operatorname{tang}\alpha$, $\pm\operatorname{cotg}\alpha$, $\pm\operatorname{cosec}\alpha$, одинаковымъ по модулямъ, но противоположнымъ по знакамъ, а для секанса — къ одному значенію $\sec\alpha$. Значенія эти и вычисляются изслѣдуемыми формулами.

Если же, кромѣ даннаго значенія $\cos x$, будетъ выбранъ изъ двухъ *квадрантовъ*, которымъ принадлежать всѣ значенія x, тотъ или другой квадрантъ, то этимъ выборомъ опредѣлится знакъ въ каждой изъ разсматриваемыхъ формулъ.

Если, напр. $\cos x = \frac{1}{3}$, причемъ x принадлежать четвертому квадранту, то

$$\sin x = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \operatorname{tang} x = -2\sqrt{2},\ \text{и т. д.},\ \sec x = 3.$$

277. Задача. — Выразить всѣ тригонометрическія функціи въ тангенсѣ.—Формула [25] даетъ:

$$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}},\qquad \sec x = \pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Внося значеніе $\cos x$ въ равенство $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, получимъ:

$$\sin x = \pm\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}},\qquad \operatorname{cosec} x = \pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}$$

и, наконецъ,

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Двойные знаки въ этихъ формулахъ соотвѣтствуютъ другъ другу, причемъ присутствіе ихъ объясняется, подобно предыдущему, слѣдующимъ образомъ:

Полученныя формулы опредѣляютъ значенія тригонометрическихъ функцій:

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \cot\!g\, x, \quad \sec x, \quad \operatorname{cosec} x$$

не по данному значенію аргумента x, *а по данному значенію* $\operatorname{tang} x$, *которому соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній аргумента* (**270, 3°**); *слѣдовательно, эти формулы опредѣляютъ значенія указанныхъ функцій не для одного опредѣленнаго значенія* x, *а для безчисленнаго множества этихъ значеній, имѣющихъ одинъ и тотъ же тангенсъ.*

Назвавъ одно изъ нихъ буквою α, получимъ для всѣхъ остальныхъ:

$$x = k\pi + \alpha.$$

Предыдущія формулы опредѣляютъ, слѣдовательно, значенія:

$$\sin x = \sin(k\pi + \alpha) = \pm \sin\alpha, \qquad \cos x = \cos(k\pi + \alpha) = \pm \cos\alpha,$$
$$\sec x = \sec(k\pi + \alpha) = \pm \sec\alpha, \qquad \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(k\pi + \alpha) = \pm \operatorname{cosec}\alpha,$$

которыя, какъ видимъ, приводятся для синуса, косинуса, секанса и косеканса къ двумъ значеніямъ, а именно, соотвѣтственно къ значеніямъ: $\pm\sin\alpha$, $\pm\cos\alpha$, $\pm\sec\alpha$, $\pm\operatorname{cosec}\alpha$, одинаковымъ по модулямъ, но противоположнымъ по знакамъ, что и указывается формулами, а для котангенса къ одному значенію $\cot\!g\,\alpha$.

Но если, кромѣ даннаго значенія $\operatorname{tang} x$, будетъ указанъ изъ двухъ *квадрантовъ*, которымъ принадлежатъ всѣ значенія x, тотъ или другой квадрантъ, то указаніемъ этимъ опредѣлится знакъ въ каждой изъ разсматриваемыхъ формулъ.

Если, напр., $\operatorname{tang} x = -2$, причемъ x принадлежатъ второму квадранту, то

$$\sin x = +\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sec x = -\sqrt{5}, \quad \operatorname{cosec} = +\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

278. Задача.—*Выразить синусъ суммы двухъ аргументовъ черезъ синусы или косинусы слагаемыхъ.* Имѣли (**234**):

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \qquad [12]$$

1°. Выражая $\cos x$ и $\cos y$ соотвѣтственно черезъ $\sin x$ и $\sin y$, получимъ слѣдующія *четыре* выраженія для $\sin(x + y)$

$$\sin(x + y) = \pm\left[\sin x\sqrt{1 - \sin^2 y} \pm \sin y\sqrt{1 - \sin^2 x}\,\right]. \qquad (1)$$

Объясненіе этой *четырехзначности* таково: формула (1) опредѣляетъ значеніе $\sin(x + y)$ не по заданнымъ значеніямъ аргументовъ: x и y, а по

заданнымъ значеніямъ: $\sin x$ и $\sin y$, каждому изъ коихъ отвѣчаетъ безчисленное множество значеній соотвѣтствующаго аргумента. Назвавъ одно изъ значеній аргумента x буквою α, а аргумента y—буквою β, получимъ для всѣхъ остальныхъ:

$$x=(-1)^p\alpha+p\pi, \qquad y=(-1)^q\beta+q\pi,$$

гдѣ p и q цѣлыя.

Формула (1) опредѣляетъ, слѣдовательно, значенія:

$$\sin(x+y)=\sin[(-1)^p\alpha+(-1)^q\beta+(p+q)\pi],$$

которыя приводятся къ значеніямъ:

$\sin(x+y)=\sin(\alpha+\beta)$, если p и q четныя,
$\sin(x+y)=\sin(-\alpha-\beta)=-\sin(\alpha+\beta)$, если p и q нечетн.,
$\sin(x+y)=\sin(\alpha-\beta+\pi)=-\sin(\alpha-\beta)$, если p четн., q нечетн.,
$\sin(x+y)=\sin(-\alpha+\beta+\pi)=-\sin(\beta-\alpha)=+\sin(\alpha-\beta)$, если p нечетн., q четн.,

т.-е. къ *четыремъ* значеніямъ:

$$\sin(x+y)=\pm\sin(\alpha\pm\beta),$$

что и указывается формулою (1).

Но если, кромѣ заданныхъ значеній $\sin x$ и $\sin y$, выбраны и указаны квадранты, которымъ принадлежатъ значенія аргументовъ x и y, то указаніемъ этимъ легко опредѣляется одно изъ четырехъ выраженій (1).

Положимъ, напр., что $\sin x=\frac{1}{3}$ и $\sin y=-\frac{1}{4}$, причемъ x принадлежатъ второму квадранту, а y четвертому; тогда.

$$\cos x=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{\sqrt{8}}{3}, \qquad \cos y=+\sqrt{1-\frac{1}{16}}=+\frac{\sqrt{15}}{4},$$

и, слѣдовательно,

$$\sin(x+y)=\frac{\sqrt{15}}{12}-\frac{\sqrt{8}}{12}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{8}}{12}.$$

2°. Выражая $\sin x$ и $\sin y$ соотвѣтственно черезъ $\cos x$ и $\cos y$, получимъ *четыре* выраженія для $\sin(x+y)$:

$$\sin(x+y)=\pm\left[\cos y\sqrt{1-\cos^2 x}\pm\cos x\sqrt{1-\cos^2 y}\right]. \qquad (2)$$

Объясненіе этой *четырехзначности* таково. Назвавъ одно изъ значеній x, отвѣчающихъ данному значенію $\cos x$, буквою α, а одно изъ значеній y, отвѣчающихъ данному значенію $\cos y$,—буквою β, для всѣхъ остальныхъ получимъ:

$$x=\pm\alpha+2p\pi, \qquad y=\pm\beta+2q\pi,$$

гдѣ p и p цѣлыя.

Формула (2) опредѣляетъ, слѣдовательно, *четыре* значенія:

$$\sin(x+y)=\sin[\pm\alpha\pm\beta+2(p+q)\pi]=\sin(\pm\alpha\pm\beta)=\pm\sin(\alpha\pm\theta),$$

которыя и указываются формулою.

Но если, кромѣ заданныхъ значеній $\cos x$ и $\cos y$, выбраны и указаны квадранты, которымъ принадлежатъ значенія аргументовъ x и y то указаніемъ этимъ опредѣляется одно изъ четырехъ выраженій (2).

Положимъ, напр., что $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos y = -\frac{1}{3}$, причемъ x принадлежитъ четвертому квадранту, а y — третьему, тогда

$$\sin x = -\sqrt{1-\frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin y = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{\sqrt{8}}{3},$$

и, слѣдовательно,

$$\sin(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{8}}{6} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{8}}{6}$$

279. Задача. *Выразить косинусъ суммы двухъ аргументовъ черезъ синусы или косинусы слагаемыхъ.*

Имѣли (234).

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

1°. Выражая $\cos x$ и $\cos y$ соотвѣтственно черезъ $\sin x$ и $\sin y$, получимъ *два* выраженія для $\cos(x+y)$:

$$\cos(x+y) = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}\,.\,\sqrt{1-\sin^2 y} - \sin x \sin y. \tag{3}$$

Объясненіе этой *двузначности* таково. Назвавъ одно изъ значеній x, отвѣчающихъ данному значенію $\sin x$, буквою α, а одно изъ значеній y, отвѣчающихъ данному значенію $\sin y$, буквою β, для всѣхъ остальныхъ получимъ.

$$x = (-1)^p \alpha + p\pi, \qquad y = (-1)^q \beta + q\pi$$

Формула (3) опредѣляетъ, слѣдовательно, значенія:

$$\cos(x+y) = \cos[(-1)^p\alpha + (-1)^q\beta + (p+q)\pi],$$

которая приводятся къ таковымъ двумъ:

$$\cos(x+y) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

если p и q оба четныхъ или нечетныхъ;

$$\cos(x+y) = -\cos(\alpha-\beta) = -\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

если одно изъ чиселъ p и q четное, а другое нечетное, что и указывается формулою (3).

2°. Выражая $\sin x$ и $\sin y$ соотвѣтственно черезъ $\cos x$ и $\cos y$, получимъ *два* выраженія для $\cos(x+y)$:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y \pm \sqrt{1-\cos^2 x}\,.\,\sqrt{1-\cos^2 y}. \tag{4}$$

Двузначность объясняется подобно предыдущему.

ГЛАВА IV.

Умноженіе и дѣленіе аргумента.

§ I. Теорема умноженія аргумента.

280. Теорема. — *Каждая изъ тригонометрическихъ функцій аргумента nx, гдѣ n произвольное натуральное число, выражается алгебраически черезъ тригонометрическія функціи аргумента x.*

Докажемъ ее отдѣльно для $n=2$ и для $n=3$, а потомъ перейдемъ къ общему случаю.

281. Удвоеніе аргумента. — Разсмотримъ формулы:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos y\sin x, \qquad [12]$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin y\sin x, \qquad [12]$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}, \qquad [14]$$

доказанныя выше (**234**, **236**) для всевозможныхъ значеній аргументовъ y и x.

Положивъ въ нихъ $y=x$, получимъ:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x, \qquad [27]$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x, \qquad [28]$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}. \qquad [29]$$

Формулы эти и доказываютъ теорему для $n=2$.

Вспомнивъ, что

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

изъ формулъ [**27**] и [**28**] получаемъ:

$$\sin 2x=\pm 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}=\pm 2\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}, \qquad [30]$$

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1. \qquad [31]$$

Видимъ, что $\cos 2x$ выражается *раціонально* и въ одномъ $\cos x$, и въ одномъ $\sin x$, между тѣмъ какъ $\sin 2x$, выражаясь *раціонально* совмѣстно въ $\sin x$ и въ $\cos x$, не выражается раціонально въ одномъ $\cos x$, или въ одномъ $\sin x$.

Для объясненія причины этихъ явленій замѣтимъ, что формулы **[30]** и **[31]** опредѣляютъ значенія функцій: $\sin 2x$ и $\cos 2x$ не по данному значенію аргумента x, а по данному значенію $\sin x$ или $\cos x$; слѣдовательно, въ этихъ формулахъ буква x означаетъ *всякое* число, синусъ (косинусъ) котораго равенъ данному значенію a, гдѣ $|a| \leqslant 1$.

1°. Положимъ, что $a = \sin x$. Назовемъ буквою α одно изъ чиселъ, опредѣленное, синусъ котораго равенъ a. Знаемъ **(270, 1°)**, что всѣ остальныя выразятся формулою:

$$x = (-1)^k \alpha + k\pi,$$

гдѣ k произвольное цѣлое.

Слѣдовательно, первая изъ формулъ **[30]** и первая изъ формулъ **[31]** опредѣляютъ соотвѣтственно всѣ значенія символовъ:

$$\sin[2(-1)^k \alpha + 2k\pi] \quad \text{и} \quad \cos[2(-1)^k \alpha + 2k\pi],$$

которыя, при k *четномъ*, приведутся къ значеніямъ:

$$\sin 2\alpha \quad \text{и} \quad \cos 2\alpha,$$

а при k *нечетномъ* — къ значеніямъ

$$-\sin 2\alpha \quad \text{и} \quad \cos 2\alpha,$$

т.-е. $\sin 2x$ имѣетъ два значенія: $\pm \sin 2\alpha$, а $\cos 2x$ — одно: $\cos 2\alpha$, которыя и вычисляются полученными формулами:

2°. Положимъ, что $a = \cos x$. Знаемъ **(270, 2°)**, что всѣ значенія x заключены въ формулѣ:

$$x = \pm \alpha + 2k\pi.$$

Слѣдовательно, изслѣдуемыя формулы опредѣляютъ соотвѣтственно значенія:

$$\sin[\pm 2\alpha + 4k\pi] = \pm \sin 2\alpha, \qquad \cos[\pm 2\alpha + 4k\pi] = \cos 2\alpha,$$

т.-е. опять $\sin x$ имѣетъ два значенія: $\pm \sin 2\alpha$, а $\cos 2x$ — одно: $\cos 2\alpha$.

Но если, кромѣ значенія $\sin x$ ($\cos x$), будетъ выбранъ квадрантъ изъ тѣхъ двухъ, которымъ принадлежатъ x, то этимъ опредѣлится знакъ $\sin 2x$. Положимъ, напр., что $\cos x = -\frac{1}{7}$, причемъ x принадлежатъ *третьему* квадранту, т.-е.

$$x = 2k\pi + \beta, \quad \text{гдѣ} \quad \pi < \beta < \frac{3\pi}{2},$$

тогда

$$2x = 4k\pi + 2\beta, \quad \text{гдѣ} \quad 2\pi < 2\beta < 3\pi,$$

и, слѣдовательно,

$$\sin 2x = \sin 2\beta > 0,$$

а потому во второй изъ формулъ [**30**] должны взять знакъ (—) и получимъ:

$$\sin 2x = -2\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{49}} = \frac{2\sqrt{48}}{49} = \frac{8\sqrt{3}}{49}.$$

Положимъ, что x принадлежатъ *второму* квадранту, т. е.

$$x = 2k\pi + \beta, \quad \text{гдѣ} \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi,$$

тогда

$$2x = 4k\pi + 2\beta, \quad \text{гдѣ} \quad \pi < 2\beta < 2\pi,$$

и, слѣдовательно,

$$\sin 2x = \sin 2\beta < 0,$$

а потому во второй изъ формулъ [**30**] должны взять знакъ (+) и получимъ:

$$\sin 2x = +2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{49}} = -\frac{8\sqrt{3}}{49}.$$

Видимъ, что полученныя два значенія для $\sin 2x$ отличаются знаками.

282. Утроеніе аргумента. Положивъ въ формулахъ: [**12**], [**12**] и [**14**] $y = 2x$ и принявъ во вниманіе формулы: [**27**], [**28**] и [**29**], получимъ:

$$\sin 3x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x = \sin x(3\cos^2 x - \sin^2 x), \qquad (1)$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos x(\cos^2 x - 3\sin^2 x), \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Формулы эти и доказываютъ теорему для $n = 3$.

Принявъ во вниманіе равенства:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

можемъ написать первыя двѣ формулы въ такомъ видѣ:

$$\sin 3x = 3\sin^3 x - 4\sin x,$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Видимъ, что функціи $\sin 3x$, $\cos 3x$, $\operatorname{tang} 3x$ соотвѣтственно выражаются *раціонально* въ одномъ $\sin x$, въ одномъ $\cos x$ и въ одномъ $\operatorname{tg} x$. Но $\sin 3x$ не выражается раціонально въ одномъ $\cos x$ и $\cos 3x$ не выражается раціонально въ одномъ $\sin x$. И въ самомъ дѣлѣ, формулы (1) и (2) даютъ:

$$\sin 3x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}\,(4\cos^2 x - 1),$$
$$\cos 3x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}\,(1-\sin^2 x).$$

Причина этого явленія объясняется также, какъ и въ случаѣ $n=2$.

283. Умноженіе аргумента на n. — Замѣняя въ формулахъ [12] и [14] *послѣдовательно* $y=3x$, $y=4x$, ..., докажемъ теорему для $n=4$, $n=5$ ... и получимъ соотвѣтственныя формулы. Но можно получить общія формулы для произвольнаго натуральнаго n.

И въ самомъ дѣлѣ, имѣли (237):

$$\sin(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\cos x_1\cos x_2\ldots\cos x_n[S_1-S_3+S_5-\ldots],$$
$$\cos(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\cos x_1\cos x_2\ldots\cos x_n[1-S_2+S_4-\ldots],$$
$$\operatorname{tg}(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\frac{S_1-S_3+S_5-\ldots}{1-S_2+S_4-\ldots},$$

гдѣ S_n означаетъ *сумму* сочетаній порядка k изъ чиселъ:

$$\operatorname{tg}x_1,\quad \operatorname{tg}x_2,\ \ldots,\ \operatorname{tg}x_n.$$

Положивъ въ этихъ формулахъ $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$, обозначивъ *число* сочетаній изъ n элементовъ порядка k символомъ $(n)_k$ [1]) и принявъ во вниманіе, что каждое слагаемое суммы S_k обратится въ $\operatorname{tg}^k x$, причемъ сама сумма обратится, слѣдовательно, въ $(n)_k\operatorname{tg}^k x$, получимъ

$$\sin(nx)=\cos^n x[(n)_1\operatorname{tg}x-(n)_3\operatorname{tg}^3x+(n)_5\operatorname{tg}^5x-\ldots],$$
$$\cos(nx)=\cos^n x[(n)_0-(n)_2\operatorname{tg}^2x+(n)_4\operatorname{tg}^4x-\ldots],$$
$$\operatorname{tg}(nx)=\frac{(n)_1\operatorname{tg}x-(n)_3\operatorname{tg}^3x+(n)_5\operatorname{tg}^5x-\ldots}{(n)_0-(n)_2\operatorname{tg}^2x+(n)_4\operatorname{tg}^4x-\ldots}$$

Формулы эти, кромѣ того, что доказываютъ теорему для произвольнаго натуральнаго n, даютъ и выраженія для

$$\sin(nx),\quad \cos(nx)\quad\text{и}\quad \operatorname{tg}(nx).$$

Вводя въ первыхъ двухъ формулахъ $\cos^n x$ въ скобки, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\sin(nx)&=(n)_1\cos^{n-1}x\sin x-(n)_3\cos^{n-3}x\sin^3x+(n)_5\cos^{n-5}x\sin^5x-\ldots,\\ \cos(nx)&=(n)_0\cos^n x-(n)_2\cos^{n-2}x\sin^2x+(n)_4\cos^{n-4}x\sin^4x-\ldots\end{aligned}\right\}\ [32]$$

Формулы эти и имѣли въ виду получить. Онѣ понадобятся ниже.

---

[1]) Изъ алгебры извѣстно, что

$$(n)_k=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k},\ \text{причемъ}\ (n)_0=1\ \text{и}\ (n)_k=(n)_{n-k}.$$

См. *Н. Билибинъ*. Алгебра. Изд. 4. Стр. 389.

284. Замѣчанія.—Принимая во вниманіе, что

1°. *Sinx*, при всякомъ n, входитъ: въ первую формулу въ нечетныхъ степеняхъ, а во вторую—въ четныхъ,

2°. *Cosx*, при четномъ n, входитъ: въ первую формулу въ нечетныхъ степеняхъ, а во вторую—въ четныхъ, и, при нечетномъ n, входитъ въ первую формулу въ четныхъ степеняхъ, а во вторую—въ нечетныхъ, заключаемъ:

1°. $\sin(nx)$ не способенъ выражаться раціонально въ одномъ $\cos x$ ни при какомъ n.

$\cos(nx)$ способенъ выражаться раціонально въ одномъ $\cos x$ при всякомъ n.

2°. $\sin(nx)$ способенъ выражаться раціонально въ одномъ $\sin x$ только при n нечетномъ.

$\cos(nx)$ способенъ выражаться раціонально въ одномъ $\sin x$ только при n четномъ, или иначе:

1°. При n четномъ: $\sin(nx)$ неспособенъ выражаться раціонально въ одномъ $\sin x$ или въ одномъ $\cos x$; $\cos(nx)$ способенъ выражаться раціонально и въ одномъ $\sin x$ и въ одномъ $\cos x$.

2°. При n нечетномъ. $\sin(nx)$ способенъ выражаться раціонально только въ одномъ $\sin x$; $\cos(nx)$ способенъ выражаться раціонально только въ одномъ $\cos x$.

Всѣ эти явленія легко объяснимы. И въ самомъ дѣлѣ:

А. Посмотримъ, сколько значеній, при данномъ значеніи $\sin x = a$, будутъ имѣть символы

$$\sin(nx) \quad \text{и} \quad \cos(nx)?$$

Назовемъ одно изъ значеній x, синусъ коего равенъ a, буквою α. Всѣ значенія x заключены въ формулѣ (270, 1°):

$$x = (-1)^k\alpha + k\pi,$$

гдѣ k произвольное цѣлое.

Имѣли (223):

$$\sin(nx) = \sin[n(-1)^k\alpha + nk\pi] = (-1)^{nk}\sin[n(-1)^k\alpha],$$
$$\cos(nx) = \cos[n(-1)^k\alpha + nk\pi] = (-1)^{nk}\cos[n(-1)^k\alpha].$$

Если n нечетное, то

$$\sin(nx) = +\sin(n\alpha), \qquad \cos(nx) = \pm\cos(n\alpha)\ ^{1)},$$

т.-е. $\sin(nx)$ имѣетъ одно значеніе, $\cos(nx)$—два.

Если n четное, то

$$\sin(nx) = \pm\sin(n\alpha), \qquad \cos(nx) = +\cos(n\alpha)\ ^{2)},$$

т.-е. $\sin(nx)$ имѣетъ два значенія, $\cos(nx)$—одно.

---

[1]) И въ самомъ дѣлѣ, если k четное, то $(-1)^{nk} = +1$, $\sin[n(-1)^k\alpha] = \sin(n\alpha)$, $\cos[n(-1)^k\alpha] = \cos(n\alpha)$; если же k нечетное, то $(-1)^{nk} = -1$, $\sin[n(-1)^k\alpha] = \sin(-n\alpha) = -\sin(n\alpha)$, $\cos[n(-1)^k\alpha] = \cos(-n\alpha) = \cos(n\alpha)$.

[2]) И въ самомъ дѣлѣ, если k четное, то $(-1)^{nk} = +1$, $\sin[n(-1)^k\alpha] = \sin(n\alpha)$, $\cos[n(-1)^k\alpha] = \cos(n\alpha)$; если же k нечетное, то $(-1)^{nk} = 1$, $\sin[n(-1)^k\alpha] = -\sin(n\alpha)$, $\cos[n(-1)^k\alpha] = \cos(n\alpha)$.

5. Посмотримъ, сколько значеній, при данномъ значеніи $\cos x = a$, будутъ имѣть символы:

$$\sin(nx) \quad \text{и} \quad \cos(nx)?$$

Назовемъ одно изъ значеній x, косинусъ коего равенъ a, буквою α. Всѣ значенія x заключены въ формулѣ:

$$x = \pm\alpha + 2k\pi,$$

гдѣ k произвольное цѣлое.

Имѣли.

$$\sin(nx) = \sin[\pm n\alpha + 2nk\pi] = \pm\sin(n\alpha),$$
$$\cos(nx) = \cos[\pm n\alpha + 2nk\pi] = +\cos(n\alpha),$$

т.-е. $\sin(nx)$ имѣетъ два значенія, $\cos(nx)$ — одно, каково бы не было n: четное или нечетное.

Дадимъ нѣсколько частныхъ случаевъ предыдущихъ формулъ

1° Положимъ $n = 5$. Получимъ:

$$\sin 5x = (5)_1\cos^4 x\sin x - (5)_3\cos^2 x\sin^3 x + (5)_5\sin^5 x,$$
$$\cos 5x = (5)_0\cos^5 x - (5)_2\cos^3 x\sin^2 x + (5)_4\cos x\sin^4 x.$$

Но

$$(5)_0 = 1,\ \ (5)_1 = 5,\ \ (5)_2 = 10,\ \ (5)_3 = 10,\ \ (5)_4 = 5,\ \ (5)_5 = 1;$$

слѣдовательно,

$$\sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x,$$
$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$$

или, замѣняя въ первой формулѣ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и во второй: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x,$$
$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x.$$

Видимъ, что $\sin 5x$ выражается *раціонально* только въ одномъ $\sin x$ и $\cos 5x$ — только въ одномъ $\cos x$.

2°. Положимъ $n = 6$. Получимъ.

$$\sin 6x = (6)_1\cos^5 x\sin x - (6)_3\cos^3 x\sin^3 x + (6)_5\cos x\sin^5 x,$$
$$\cos 6x = (6)_0\cos^6 x - (6)_2\cos^4 x\sin^2 x + (6)_4\cos^2 x\sin^4 x - (6)_6\sin^6 x,$$

Но

$$(6)_0 = 1,\ \ (6)_1 = 6,\ \ (6)_2 = 15,\ \ (6)_3 = 20,\ \ (6)_4 = 15,\ \ (6)_5 = 6,\ \ (6)_6 = 1,$$

слѣдовательно,

$$\sin 6x = 6\cos^5 x\sin x - 20\cos^3 x\sin^3 x + 6\cos x\sin^5 x,$$
$$\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x\sin^2 x + 15\cos^2 x\sin^4 x - \sin^6 x.$$

Видимъ, что $\sin 6x$ не выражается раціонально въ одномъ $\sin x$ или въ одномъ $\cos x$; $\cos 6x$ выражается раціонально и въ одномъ $\cos x$ и въ одномъ $\sin x$.

Выраженія суть:

$$\sin 6x = \cos x(32\sin^5 x - 32\sin^3 x + 6\sin x) = \sin x(32\cos^5 x - 32\cos^3 x + 6\cos x);$$
$$\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1 = -32\sin^6 x + 48\sin^4 x - 18\sin^2 x + 1.$$

§ II. Теорема дѣленія аргумента.

285. Теорема. — *Каждая изъ тригонометрическихъ функцій аргумента* $\frac{x}{n}$, *гдѣ* n *есть натуральное число, выражается алгебраически черезъ тригонометрическія функціи аргумента* x.

Докажемъ сперва эту теорему для $n = 2$, а потомъ распространимъ ее на всякое натуральное n.

286. Выраженія тригонометрическихъ функцій аргумента $\frac{x}{2}$ въ $\cos x$. — Имѣли:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

Измѣняя здѣсь $2x$ въ x, получимъ равенство.

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x,$$

которое, вмѣстѣ съ равенствомъ:

$$\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1,$$

представитъ систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными: $\cos \frac{x}{2}$ и $\sin \frac{x}{2}$. Сложивъ и вычтя эти уравненія по частямъ, получимъ важныя равенства:

$$2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x, \qquad [33]$$

$$2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x, \qquad [34]$$

которыя дадутъ:

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \qquad [35]$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \qquad [36]$$

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}. \qquad [37]$$

Формулы эти, доказывая, какъ видно, теорему, даютъ алгебраическія выраженія функцій. $\cos\frac{x}{2}$, $\sin\frac{x}{2}$ и $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ въ функціи $\cos x$.

Двойные знаки въ формулахъ объясняются тѣмъ, что формулы эти опредѣляютъ значенія функцій: $\cos\frac{x}{2}$, $\sin\frac{x}{2}$ и $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ не по данному значенію аргумента x, а по данному значенію косинуса его. Ихъ можно предвидѣть. И въ самомъ дѣлѣ, предложимъ такой вопросъ:

Сколько значеній, при данномъ значеніи $\cos x = a$, *имѣетъ каждый изъ символовъ*.

$$\cos\frac{x}{2}, \quad \sin\frac{x}{2}, \quad \operatorname{tang}\frac{x}{2}\ ?$$

Назовемъ одно изъ значеній x, косинусъ коего равенъ a, буквою α. Всѣ остальныя заключены въ формулѣ:

$$2k\pi \pm \alpha,$$

гдѣ k произвольное цѣлое.

Имѣли:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\pm\frac{\alpha}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \sin\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sin\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\pm\frac{\alpha}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \cos\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\cos\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\pm\frac{\alpha}{2} + k\pi\right) = \operatorname{tang}\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\ ^{1}).$$

Видимъ, что каждый изъ символовъ имѣетъ по два значенія.

Если же, кромѣ $\cos x$, будетъ дано значеніе x, то этимъ опредѣлится знакъ въ каждой изъ предыдущихъ формулъ.

287. Примѣры. — См. 1-ую часть этого курса (**48**).

288. Выраженія тригонометрическихъ функцій аргумента $\frac{x}{2}$ въ $\sin x$. — Имѣли:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

---

[1]) Замѣтимъ, что, при k четномъ, соотвѣтственныя знаки правыхъ частей таковы: $\pm\sin\frac{\alpha}{2}$, $+\cos\alpha$, $\pm\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$; при нечетномъ k соотвѣтственные знаки таковы: $\mp\sin\frac{\alpha}{2}$, $-\cos\frac{\alpha}{2}$, $\pm\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$.

Измѣняя x въ $\frac{x}{2}$, получимъ:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x. \tag{1}$$

Присоединивъ сюда равенство:

$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1, \tag{2}$$

получимъ систему двухъ уравненій: (1) и (2), которая, посредствомъ сложенія и вычитанія этихъ уравненій по частямъ, можетъ быть замѣнена равносильною системою:

$$\left[\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right]^2=1+\sin x,$$
$$\left[\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right]^2=1-\sin x,$$

которая даетъ:

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\varepsilon\sqrt{1+\sin x},$$
$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=\varepsilon_1\sqrt{1+\sin x},$$

гдѣ

$$\varepsilon=\pm 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon_1=\pm 1.$$

Изъ послѣднихъ двухъ уравненій получаемъ.

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} \sin\frac{x}{2}&=\frac{1}{2}\left[\varepsilon\sqrt{1+\sin x}+\varepsilon_1\sqrt{1-\sin x}\right],\\ \cos\frac{x}{2}&=\frac{1}{2}\left[\varepsilon\sqrt{1+\sin x}-\varepsilon_1\sqrt{1-\sin x}\right].\end{aligned}\right.$$

Равенства эти показываютъ, что получаются *четыре* значенія для $\sin\frac{x}{2}$ и *четыре* значенія для $\cos\frac{x}{2}$, причемъ четыре значенія для $\sin\frac{x}{2}$ одинаковы съ четырьмя значеніями для $\cos\frac{x}{2}$. Но не равныя значенія, взятыя для $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$, будутъ *совмѣстными: совмѣстными* будутъ тѣ значенія для $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$, которыя соотвѣтствуютъ *одинаковымъ* ε и *одинаковымъ* ε_1 [1]).

---

[1]) Такъ, напр., взявъ $\varepsilon=-1$ и $\varepsilon_1=-1$, получимъ совмѣстныя значенія:
$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[-\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right],\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[-\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right].$$

Взявъ же, напр., въ верхней формулѣ: $\varepsilon=-1$, $\varepsilon_1=-1$, а въ нижней: $\varepsilon=+1$, $\varepsilon_1=-1$, получимъ несовмѣстныя значенія:
$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[-\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right],\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[+\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right].$$

Принимая во вниманіе, что

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}},$$

и подставляя сюда, вмѣсто $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$, найденныя для нихъ *совмѣстныя* значенія, получимъ:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\varepsilon\sqrt{1+\sin x}+\varepsilon_1\sqrt{1-\sin x}}{\varepsilon\sqrt{1+\sin x}-\varepsilon_1\sqrt{1-\sin x}}.$$

Кажется, на первый взглядъ, что получили четыре значенія для $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Но легко убѣдиться, что получили только два значенія. И въ самомъ дѣлѣ, умножая числителя и знаменателя каждой изъ четырехъ дробей, представляющихъ значенія $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, на то значеніе ε, которое соотвѣтствуетъ этой дроби, приведемъ эти четыре значенія къ слѣдующимъ:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\varepsilon\varepsilon\sqrt{1+\sin x}+\varepsilon\varepsilon_1\sqrt{1-\sin x}}{\varepsilon\varepsilon\sqrt{1+\sin x}-\varepsilon\varepsilon_1\sqrt{1-\sin x}}.$$

Но $\varepsilon\varepsilon=1$, причемъ $\varepsilon\varepsilon_1$ равно $+1$ или -1; слѣдовательно, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ имѣетъ два значенія:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin x}\pm\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}\mp\sqrt{1-\sin x}},\tag{4}$$

гдѣ верхніе (нижніе) знаки соотвѣтствуютъ. Видимъ, что произведеніе этихъ значеній равно 1.

Легко объяснить полученную *четырехзначность* для $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$ и *двузначность* для $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

И въ самомъ дѣлѣ, формулы (3) и (4) опредѣляютъ значенія $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не по данному значенію аргумента x, а по данному значенію его синуса. Слѣдовательно, въ этихъ формулахъ буква x означаетъ всякое число, синусъ котораго равенъ данному числу a, т.-е. формулы эти опредѣляютъ значенія символовъ: $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не для опредѣленнаго значенія аргумента x,

а для безчисленнаго множества значеній, синусы коихъ равны данному числу a. Легко, однако, показать, что всѣ значенія $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$ приводятся къ четыремъ значеніямъ, а всѣ значенія $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ — къ двумъ.

Назовемъ буквою α одно изъ чиселъ, синусы коихъ равны a; всѣ остальныя заключены въ формулѣ:

$$x = (-1)^n\alpha + n\pi, \quad \text{откуда} \quad \frac{x}{2} = (-1)^n\frac{\alpha}{2} + n\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Слѣдовательно, имѣемъ:

A. Если n четное $= 2k$, то

$$\sin\frac{x}{2} = \sin\left[k\pi + \frac{\alpha}{2}\right] = (-1)^k\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sin\frac{\alpha}{2},$$
$$\cos\frac{x}{2} = \cos\left[k\pi + \frac{\alpha}{2}\right] = (-1)^k\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\cos\frac{\alpha}{2},$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\left[k\pi + \frac{\alpha}{2}\right] \qquad = +\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

B. Если n нечетное $= 2k+1$, то

$$\sin\frac{x}{2} = \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right] = (-1)^k\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\cos\frac{\alpha}{2},$$
$$\cos\frac{x}{2} = \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right] = (-1)^k\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sin\frac{\alpha}{2},$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right] = \qquad = +\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Видимъ, что всѣ значенія $\sin\frac{x}{2}$ и всѣ значенія $\cos\frac{x}{2}$ приводятся къ четыремъ:

$$\pm\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad \pm\cos\frac{\alpha}{2},$$

одинаковымъ для $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$, которыя и опредѣляются формулами (3); всѣ значенія для $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ приводятся къ двумъ:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

произведеніе коихъ равно 1 и которыя опредѣляются формулами (4).

Если же, кромѣ $\sin x$, будетъ назначено значеніе α аргумента, то этимъ опредѣлится, какія значенія для ε и ε_1, $+1$ или -1,

должны быть приняты въ формулахъ (3) для того, чтобы онѣ давали именно значенія: $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$.

И въ самомъ дѣлѣ, если α дано, то данъ *квадрантъ*, которому принадлежитъ число $\frac{\alpha}{2}$; а потому даны знаки чиселъ: $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$; слѣдовательно, принимая во вниманіе, что два значенія, изъ четырехъ, даваемыя формулами (3), положительныя и два значенія отрицательныя, придется дѣлать выборъ между двумя положительными (отрицательными) значеніями. Выборъ этотъ дѣлается такимъ образомъ: значенія, опредѣляемыя первою изъ формулъ (3), суть значенія:

$$\sin\frac{\alpha}{2},\quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right),\quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)\quad \text{и}\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right);$$

значенія, опредѣляемыя второю изъ формулъ (3), суть значенія:

$$\cos\frac{\alpha}{2},\quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right),\quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)\quad \text{и}\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)^{1)}.$$

Замѣтивъ это, смотримъ, которое изъ чиселъ:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2},\qquad \frac{\alpha}{2}+\pi,\qquad \frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}$$

имѣетъ синусъ (косинусъ), одинаковый, по знаку, съ $\sin\frac{\alpha}{2}$ $\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, и приводимъ это число и число $\frac{\alpha}{2}$ въ область $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; это приведеніе опредѣлитъ, который изъ синусовъ (косинусовъ) будетъ болѣе: синусъ (косинусъ) ли этого числа или числа $\frac{\alpha}{2}$, ибо въ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ бо́льшему синусу (косинусу) отвѣчаетъ бо́льшее (меньшее) значеніе аргумента.

Замѣтимъ, что достаточно сдѣлать выборъ для $\sin\frac{\alpha}{2}$. Этимъ опредѣлится выборъ совмѣстнаго значенія для $\cos\frac{\alpha}{2}$.

---

[1]) Ибо:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\ \cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)=\ \sin\frac{\alpha}{2},\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=-\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\alpha}{2},\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)=-\cos\frac{\alpha}{2},\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\ \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Примѣръ. — *Вычислить тригонометрическіе элементы числа* $\frac{\pi}{8}$, *зная, что*

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Такъ какъ число $\frac{\pi}{8}$ принадлежитъ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то его синусъ положительный. Изъ трехъ чиселъ:

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}, \qquad \frac{\pi}{8}+\pi, \qquad \frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$

только первое имѣетъ положительный синусъ.

Оно можетъ быть замѣнено числомъ.

$$\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8},$$

принадлежащемъ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Но

$$\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8};$$

слѣдовательно,

$$\sin\frac{\pi}{8}<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right),$$

т.-е. изъ двухъ положительныхъ значеній, даваемыхъ первою изъ формулъ (3), должно взять меньшее, которому соотвѣтствуютъ: $\varepsilon=+1$ и $\varepsilon'=-1$.

Итакъ,

$$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right],$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right],$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

289. Выраженіе $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ въ $\operatorname{tg}x$. —Имѣли (**281**) формулу:

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}. \qquad [29]$$

Измѣняя въ ней x въ $\frac{x}{2}$, получимъ:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Равенство это даетъ уравненіе второй степени относительно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, и именно:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} x = 0,$$

имѣющее вещественные корни, произведеніе коихъ равно (-1).

Рѣшая это уравненіе, получимъ:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x} \qquad (1)$$

и выразимъ, слѣдовательно, $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ алгебраически въ $\operatorname{tg} x$.

Легко объяснить *двузначность* результата.

Полученная формула вычисляетъ $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не по данному значенію x, а по данному $\operatorname{tg} x$; слѣдовательно, въ этой формулѣ буква x означаетъ всякое число, тангенсъ котораго равенъ данному числу a. Означивъ одно изъ нихъ буквою α, получимъ всѣ остальныя:

$$x = k\pi + \alpha,$$

а потому:

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} = \operatorname{tang}\left(k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } k \text{ четное},$$
$$= -\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } k \text{ нечетное};$$

слѣдовательно, тангенсы чиселъ $\frac{x}{2}$ приводятся къ двумъ числамъ, произведеніе коихъ равно -1; числа эти и вычисляются при помощи формулы (1).

Двойственность исчезаетъ, если, кромѣ $\operatorname{tg} x$, будетъ дано x, ибо тогда опредѣлится квадрантъ, которому принадлежитъ $\frac{x}{2}$, а слѣдовательно и знакъ $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Примѣръ. — *Вычислить* $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$, *зная, что* $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} = -1$. Число $\frac{7\pi}{8}$ принадлежитъ 2-ому квадранту, а потому тангенсъ его отрицательный, и, слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8} = \frac{-1+\sqrt{1+1}}{-1} = -\sqrt{2}.$$

290. Выраженія тригонометрическихъ функцій аргумента $\frac{x}{n}$ черезъ $\cos x$. Измѣнивъ, во второй изъ формулъ [32] (283), x въ $\frac{x}{n}$, получимъ уравненіе:

$$\cos^n\frac{x}{n} - (n)_2\cos^{n-2}\frac{x}{n}\sin^2\frac{x}{n} + (n)_4\cos^{n-4}\frac{x}{n}\sin^4\frac{x}{n} \quad . \quad . \quad = \cos x. \qquad (1)$$

Положивъ въ немъ:

$$\cos\frac{x}{n} = z, \qquad \sin^2\frac{x}{n} = 1 - z^2,$$

получимъ *алгебраическое* уравненіе:

$$z^n - (n)_2 z^{n-2}(1-z^2) + (n)_4 z^{n-4}(1-z^2)^2 - \ldots - \cos x = 0 \qquad (2)$$

относительно $z = \cos\frac{x}{n}$, въ которое $\cos x$ входитъ, какъ *коэффиціентъ* (послѣдній членъ).

Слѣдовательно, $\cos\frac{x}{n}$ *выражается алгебраически въ* $\cos x$, что и нужно было показать.

Такъ какъ лѣвая часть уравненія (2) есть функція z, то ее можно обозначить черезъ $f(z)$, и уравненіе (2) перепишется такъ:

$$f(z) = 0. \qquad (3)$$

Покажемъ, что оно имѣетъ n вещественныхъ корней, заключенныхъ между -1 и $+1$.

Для доказательства замѣтимъ равенство:

$$\cos^n\frac{p\pi}{n} - (n)_2\cos^{n-2}\frac{p\pi}{n}\sin^2\frac{p\pi}{n} + (n)_4\cos^{n-4}\frac{p\pi}{n}\sin^4\frac{p\pi}{n} - \ldots = (-1)^p,$$

гдѣ p произвольное цѣлое, которое найдемъ, если въ равенство (1) подставимъ, вмѣсто x, $p\pi$ и вспомнимъ, что $\cos p\pi = (-1)^p$.

Замѣтивъ это равенство и подставивъ въ лѣвую часть уравненія (3), вмѣсто z, число $\cos\frac{p\pi}{n}$, получимъ *равенство*:

$$f\left[\cos\frac{p\pi}{n}\right] = (-1)^p - \cos x.$$

Дѣлая здѣсь послѣдовательно:

$$p=0,\ \ p=1,\ \ p=2, \ldots, p=n-1,\ \ p=n,$$

найдемъ:

$$f\left[\cos\frac{0\pi}{n}\right]\geqslant 0,\quad f\left[\cos\frac{1\pi}{n}\right]\leqslant 0,\quad f\left[\cos\frac{2\pi}{n}\right]\geqslant 0, \ldots [1]),$$

т.-е. результаты подстановокъ въ лѣвую часть уравненія, вмѣсто буквы z, чиселъ:

$$\cos\frac{0.\pi}{n}=1,\quad \cos\frac{1.\pi}{n},\quad \cos\frac{2.\pi}{n},\ldots,\quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n},\quad \cos\frac{n\pi}{n}=-1 \qquad (4)$$

имѣютъ противоположные знаки; слѣдовательно, въ каждомъ изъ n промежутковъ, образованныхъ числами (4), лежитъ, вслѣдствіе непрерывности функціи $f(z)$, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень уравненія; но такъ какъ уравненіе (3), будучи уравненіемъ n-ой степени, не можетъ имѣть болѣе n корней, то въ каждомъ изъ указанныхъ промежутковъ будетъ лежать только одинъ вещественный корень. Итакъ, уравненіе (3) имѣетъ n вещественныхъ корней, причемъ всѣ они заключены между $+1$ и -1.

Этимъ n корнямъ, представляющимъ значенія $\cos\frac{x}{n}$, отвѣчаютъ $2n$ значеній $\sin\frac{x}{n}$, опредѣляемыхъ равенствомъ:

$$\sin\frac{x}{n}=\pm\sqrt{1-\cos^2\frac{x}{n}}, \qquad (5)$$

и, слѣдовательно, $2n$ значеній для $\operatorname{tg}\frac{x}{n}$.

Легко объяснить эти *многозначности* $\cos\frac{x}{n}$ и $\sin\frac{x}{n}$.

И въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (3) вычисляетъ $\cos\frac{x}{n}$ не по данному значенію x, а по данному значенію $\cos x=a$; слѣдовательно, x въ уравненіи (3) означаетъ всякое число, косинусъ коего равенъ a.

Назвавъ одно изъ нихъ буквою α, получимъ:

$$x=2k\pi\pm\alpha,\quad \text{откуда}\quad \frac{x}{n}=\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{\alpha}{n}.$$

Ограничимся, для сокращенія письма, случаемъ $n=3$.
Имѣемъ, слѣдовательно,

$$\cos\left(\frac{x}{3}\right)=\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}\right),\qquad \sin\left(\frac{x}{3}\right)=\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\alpha}{3}\right).$$

1°. Если $k=3h$, гдѣ h произвольное цѣлое, то

$$\cos\left(\frac{x}{3}\right)=\cos\left(\pm\frac{\alpha}{3}\right)=\cos\frac{\alpha}{3},\quad \sin\left(\frac{x}{3}\right)=\sin\left(\pm\frac{\alpha}{3}\right)=\pm\sin\frac{\alpha}{3}.$$

[1]) Знаки равенствъ имѣютъ мѣсто: при четномъ p, если $\cos x=1$, и при нечетномъ p, если $\cos x=-1$.

2° Если $k = 3h + 1$, то

$$\cos\frac{x}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right), \qquad \sin\frac{x}{3} = \sin\left(\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right).$$

3°. Если $k = 3h - 1$, то

$$\cos\frac{x}{3} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} \mp \frac{\alpha}{3}\right),$$

$$\sin\frac{x}{3} = \sin\left(-\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3} \mp \frac{\alpha}{3}\right).$$

Всѣ случаи исчерпаны, ибо всякое цѣлое значеніе, взятое для k, заключено въ одной изъ формулъ: $3h$, $3h+1$ и $3h-1$, гдѣ h произвольное цѣлое.

Видимъ, что $\cos\frac{x}{3}$ имѣетъ три значенія:

$$\cos\frac{\alpha}{3}, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

а $\sin\frac{x}{3}$ имѣетъ шесть значеній:

$$\pm\sin\frac{\alpha}{3}, \quad \pm\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right), \quad \pm\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

которыя и вычисляются уравненіями (3) и (4) [1].

291. Выраженія тригонометрическихъ функцій аргумента $\frac{x}{n}$ черезъ $\sin x$.—Измѣнивъ, въ первой изъ формулъ **[32]** **(283)**, x въ $\frac{x}{n}$, получимъ уравненіе:

$$(n)_1\cos^{n-1}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n} - (n)_3\cos^{n-3}\frac{x}{n}\sin^3\frac{x}{n} + (n)_5\cos^{n-5}\frac{x}{n}\sin^5\frac{x}{n} - \ldots - \sin x = 0. \quad (1)$$

Разсмотримъ два случая:

1°. *n есть нечетное число* $2q+1$. Въ этомъ случаѣ уравненіе (1) содержитъ только *четныя* степени $\cos\frac{x}{n}$ и можетъ написаться такъ:

$$(n)_1\cos^{2q}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n} - (n)_3\cos^{2(q-1)}\frac{x}{n}\sin^3\frac{x}{n} + \ldots + (-1)^q(n)_n\sin^n\frac{x}{n} - \sin x = 0.$$

Умноживъ обѣ части этого уравненія на $(-1)^q$ и измѣнивъ порядокъ членовъ, оставивъ послѣдній на мѣстѣ, перепишемъ уравненіе такимъ образомъ:

$$\sin^n\frac{x}{n} - (n)_2\cos^2\frac{x}{n}\sin^{n-2}\frac{x}{n} + (n)_4\cos^4\frac{x}{n}\sin^{n-4}\frac{x}{n} - \ldots + (-1)^q\cos^{2q}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n} - (-1)^q\sin x = 0.$$

Положивъ здѣсь:

$$\sin\frac{x}{n} = z, \qquad \cos^2\frac{x}{n} = 1 - z^2,$$

получимъ *алгебраическое* уравненіе:

$$z^n - (n)_2 z^{n-2}(1-z^2) + (n)_4 z^{n-4}(1-z^2)^2 - \ldots + (-1)^q z(1-z^2)^q - (-1)^q\sin x = 0 \quad (2)$$

[1]) Замѣтимъ, что, при $\alpha = 0$, нѣкоторые изъ этихъ значеній *равны*, и, слѣдовательно, уравненіе (3) имѣетъ нѣкоторые корни равными.

относительно $z = \sin\frac{x}{n}$, въ которое $\sin x$ входитъ, какъ коэффиціентъ (послѣдній членъ). Слѣдовательно, $\sin\frac{x}{n}$ *выражается алгебраически въ* $\sin x$, что и нужно было показать.

Покажемъ, что уравненіе (2) имѣетъ n вещественныхъ корней, заключенныхъ между -1 и $+1$.

И въ самомъ дѣлѣ, назвавъ лѣвую часть уравненія черезъ $f(z)$, составимъ:

$$f\left[\cos\frac{p\pi}{n}\right] = \left(\cos^n\frac{p\pi}{n} - (n)_2\cos^{n-2}\frac{p\pi}{n}\sin^2\frac{p\pi}{n} + (n)_4\cos^{n-4}\frac{p\pi}{n}\sin^4\frac{p\pi}{n}\ \ldots\right) - (-1)^q\sin x,$$

гдѣ p произвольное цѣлое число.

Но количество, помѣщенное въ скобкахъ, равно $(-1)^p$ (283), слѣдовательно,

$$f\left[\cos\frac{p\pi}{n}\right] = (-1)^p - (-1)^q\sin x$$

Полагая здѣсь послѣдовательно: $p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и n и принимая во вниманіе, что $|(-1)^q\sin x| \leqslant 1$, получимъ:

$$f\left[\cos\frac{0\pi}{n}\right] \geqq 0, \quad f\left[\cos\frac{1\,.\,\pi}{n}\right] \leqslant 0, \quad f\left[\cos\frac{2\,.\,\pi}{n}\right] \geqslant 0, \ \ldots,$$
$$f\left[\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right] \geqslant 0, \quad f\left[\cos\frac{n\pi}{n}\right] \leqslant 0,$$

т.-е. результаты подстановокъ въ функцію $f(z)$, вмѣсто буквы z, чиселъ:

(3) $$\cos\frac{0\,.\,\pi}{n} = 1, \quad \cos\frac{1\,.\,\pi}{n}, \quad \cos\frac{2\,.\,\pi}{n}, \ \ldots, \quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n},$$
$$\cos\frac{n\pi}{n} = -1$$

имѣютъ противоположные знаки; слѣдовательно, въ каждомъ изъ n промежутковъ, образованныхъ числами (3), лежитъ, вслѣдствіе непрерывности функціи $f(z)$, по крайней мѣрѣ одинъ вещественный корень этой функціи, или, что то же, уравненія (2):

$$f(z) = 0.$$

Но уравненіе это, будучи уравненіемъ n-ой степени относительно z, не можетъ имѣть болѣе n корней, а потому въ каждомъ изъ указанныхъ промежутковъ лежитъ только одинъ вещественный корень, или, другими словами, числа (3) *отдѣляютъ* корни уравненія $f(z) = 0$. Итакъ, всѣ n корней уравненія (2) вещественны и всѣ они лежатъ между -1 и $+1$.

Этимъ n корнямъ, представляющимъ значенія $\sin\frac{x}{n}$, отвѣчаютъ $2n$ значеній $\cos\frac{x}{n}$, опредѣляемыхъ равенствомъ:

$$\cos\frac{x}{n} = \mp\sqrt{1 - \sin^2\frac{x}{n}},$$

и, слѣдовательно, $2n$ значеній $\operatorname{tg}\frac{x}{n}$.

Полученныя *многозначности* легко объясняются. Предоставляемъ читателю дать эти объясненія.

2°. *n есть четное число* $2q$. Въ уравненіе (1) $\cos\frac{x}{n}$ и $\sin\frac{x}{n}$ входятъ въ нечетныхъ степеняхъ. Слѣдовательно, уравненіе это не есть раціональное уравненіе ни относительно одного $\cos\frac{x}{n}$, ни относительно одного $\sin\frac{x}{n}$. Чтобы сдѣлать его раціональнымъ, необходимо и достаточно возвысить обѣ части его въ квадратъ. И въ самомъ дѣлѣ, написавъ уравненіе въ видѣ:

$$\cos\frac{x}{n}\Big[(n)_1\cos^{2q-2}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n}-(n)_3\cos^{2q-4}\frac{x}{n}\sin^3\frac{x}{n}+\ldots+$$
$$+\ldots+(-1)^{q-1}(n)_{n-1}\sin^{n-1}\frac{x}{n}\Big]=\sin x$$

и положивъ въ немъ:

$$\sin\frac{x}{n}=z,\qquad \cos\frac{x}{n}=\pm\sqrt{1-z^2},$$

получимъ:

$$(4)\qquad \pm\sqrt{1-z^2}\big[(n)_1(1-z^2)^{q-1}z-(n)_3(1-z^2)^{q-2}z^3+\ldots+$$
$$+\ldots+(-1)^{q-1}(n)_{n-1}z^{n-1}\big]=\sin x.$$

Возвысивъ его въ квадратъ, что *не введетъ постороннихъ рѣшеній* (по причинѣ двойного знака), найдемъ:

$$(5)\qquad (1-z^2)\big[(n)_1(1-z^2)^{q-1}z-(n)_3(1-z^2)^{q-1}z^3+\ldots+$$
$$+\ldots+(-1)^{q-1}(n)_{n-1}z^{n-1}\big]^2-\sin^2x=0.$$

Уравненіе это есть уравненіе *алгебраическое* степени $2n$ относительно z. Слѣдовательно, $z=\sin\frac{x}{n}$ *выражается алгебраически въ* $\sin x$, что и нужно было показать.

Покажемъ, что уравненіе (5) имѣетъ $2n$ вещественныхъ корней, легко *отдѣляемыхъ*.

И въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ лѣвую часть уравненія, вмѣсто z, число $\cos\frac{p\pi}{2n}$, гдѣ p произвольное цѣлое, найдемъ, для результата подстановки, число:

$$\sin^2\frac{p\pi}{2n}-\sin^2x.$$

Если p четное, то результатъ подстановки, равный $-\sin^2x$, есть число *отрицательное;* если p нечетное, то этотъ результатъ, равный $1-\sin^2x=\cos^2x$, есть число *положительное.*

Итакъ, подставляя послѣдовательно въ лѣвую часть уравненія, представляющую *непрерывную* функцію аргумента z, $(2n+1)$ убывающихъ чиселъ:

$$(6) \qquad 1,\ \cos\frac{\pi}{2n},\ \cos\frac{2\pi}{2n},\ \cos\frac{3\pi}{2n},\ \ldots,\ \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}, \qquad 1,$$

увидимъ, что знаки подстановокъ будутъ чередоваться.

Слѣдовательно, между двумя послѣдовательными числами написаннаго ряда заключается по крайней мѣрѣ одинъ корень уравненія (5).

Но уравненіе не можетъ имѣть болѣе $2n$ корней, причемъ число промежутковъ, образованныхъ числами (6), равно именно $2n$; слѣдовательно, въ каждомъ изъ нихъ заключается одинъ вещественный корень уравненія, и уравненіе имѣетъ $2n$ вещественныхъ корней, заключенныхъ между $+1$ и -1.

Такъ какъ z входитъ въ уравненіе въ *четныхъ* степеняхъ, то $2n$ корней уравненія, попарно, равны по модулю и противоположны по знаку.

Итакъ, $\sin\dfrac{x}{n} = z$ *имѣетъ*, **при данномъ значеніи** $\sin x$, $2n$ *различныхъ значеній, которыя, попарно, равны по модулю, но противоположны по знаку.*

Легко видѣть, что $\cos\dfrac{x}{n}$ имѣетъ также только $2n$ различныхъ значеній, а не $4n$, какъ это, казалось, слѣдовало бы изъ равенства:

$$\cos\frac{x}{n} = \pm\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{n}},$$

ибо для того, чтобы уравненіе (4) удовлетворялось, должно выбрать, при данномъ значеніи $\sin x$, тотъ изъ двухъ знаковъ при квадратномъ корнѣ, при которомъ вся лѣвая часть имѣетъ знакъ, одинаковый со знакомъ даннаго числа: $\sin x$.

Замѣчая, что, при измѣненіи z въ $(-z)$, лѣвая часть уравненія (5) измѣняетъ знакъ, заключаемъ, что двумъ значеніямъ $z=\sin\dfrac{x}{n}$, равнымъ по модулю, но противоположнымъ по знаку, отвѣчаютъ равныя по модулю, но противоположныя по знаку, значенія $\cos\dfrac{x}{n}$. Слѣдовательно, двумъ значеніямъ $\sin\dfrac{x}{n}$, равнымъ по модулю, но противоположнымъ по знаку, отвѣчаетъ одно значеніе для $\operatorname{tg}\dfrac{x}{n}$, а именно:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{n} = \frac{\sin\frac{x}{n}}{\cos\frac{x}{n}}.$$

А потому, $\operatorname{tg}\dfrac{x}{n}$, **при данномъ значеніи** $\sin x$, *имѣетъ n различныхъ значеній.*

Всѣ эти результаты согласны съ тѣми, которые имѣли выше для $n=2$ **(288)**. Всѣ полученныя *многозначности* легко объясняются.

Предоставляемъ читателю дать эти объясненія.

292. Выраженія тригонометрическихъ функцій аргумента $\frac{x}{n}$ въ $\tan x$. — Измѣняя, въ формулѣ для $\operatorname{tg}(nx)$ (283), x въ $\frac{x}{n}$ и уничтожая знаменателей, получимъ уравненіе:

$$(n)_1 \operatorname{tg}\frac{x}{n} - (n)_3 \operatorname{tg}^3\frac{x}{n} + (n)_5 \operatorname{tg}^5\frac{x}{n} - \ldots -$$
$$= \operatorname{tg} x\left[1 - (n)_2 \operatorname{tg}^2\frac{x}{n} + (n)_4 \operatorname{tg}^4\frac{x}{n} - \ldots\right].$$

Полагая:

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{n}$$

и располагая по возрастающимъ степенямъ z, найдемъ:

$$\operatorname{tg}x - (n)_1 z - (n)_2 \operatorname{tg}x \cdot z^2 + (n)_3 z^3 + (n)_4 \operatorname{tg}x \cdot z^4 - \ldots = 0. \qquad (1)$$

Уравненіе это есть алгебраическое уравненіе относительно z степени n, причемъ $\operatorname{tg}x$ входитъ въ его коэффиціенты.

Слѣдовательно, $z = \operatorname{tg}\frac{x}{n}$ *выражается алгебраически въ* $\operatorname{tg}x$, что и нужно было показать.

Уравненіе (1) имѣетъ n корней, которые легко *отдѣляются*. И въ самомъ дѣлѣ, легко показать, что знаки результатовъ подстановокъ въ лѣвую часть уравненія (1), вмѣсто буквы z чиселъ:

$$-\infty,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right),\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{n}\right),\ \ldots,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right),\ +\infty,$$

чередуются.

Полученная *многозначность* легко объясняется.

293. Теорема. — *Каждая изъ тригонометрическихъ функцій аргумента x выражается* **раціонально** *въ* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Теорема очевидна для $\operatorname{tg} x$, ибо имѣли:

$$\operatorname{tg}x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Далѣе:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2},$$

но

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}, \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

слѣдовательно,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

т.-е. теорема доказана для $\sin x$.

Принимая во вниманіе, что $\cos x = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$, и раздѣляя по частямъ формулы, полученныя для $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$, найдемъ:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

т.-е. теорема доказана для $\cos x$.

Очевидно, что теорема имѣетъ мѣсто и для $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ и $\operatorname{cotg} x$, ибо

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Доказанная теорема имѣетъ большія приложенія.

ГЛАВА V.

Тригонометрическія уравненія.

§ I. Уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

294. Опредѣленія. — Разсмотримъ два выраженія A и B, *алгебраическія* относительно тригонометрическихъ функцій аргументовъ: x, nx и $\frac{x}{p}$, гдѣ n и p суть натуральныя числа.

Выраженія эти или имѣютъ, при всякомъ, одномъ и томъ же, значеніи x, одинаковыя числовыя значенія, или получаютъ таковыя только при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ буквы x.

Въ первомъ случаѣ говорятъ, что выраженія A и B *тождественны*, эта тождественность можетъ обозначаться знакомъ ;
такъ, напр., можемъ написать:

$$\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1, \qquad \cos 2x \equiv \cos^2 x - \sin^2 x,$$

и т. д.

Во второмъ случаѣ можно искать тѣ значенія буквы x, при которыхъ выраженія A и B получаютъ одинаковыя значенія. Эти значенія буквы x называются *корнями* или *рѣшеніями тригонометрическаго уравненія:*

$$A=B.$$

Рѣшить тригонометрическое уравненіе, значитъ найти его корни.

Увидимъ, что тригонометрическое уравненіе имѣетъ, вообще, безчисленное множество рѣшеній. Такъ, напр., уравненіе

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

имѣетъ безчисленное множество корней, заключенныхъ въ формулѣ:

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi,$$

гдѣ n произвольное цѣлое (**270**).

295. Общая метода рѣшенія.—Общая метода рѣшенія тригонометрическаго уравненія такова:

Положимъ, что уравненіе заключаетъ нѣсколько тригонометрическихъ функцій аргументовъ: x, nx и $\frac{x}{p}$, гдѣ n и p суть натуральныя числа.

Выражаемъ, при помощи вышеданныхъ формулъ, всѣ тригонометрическія функціи, входящія въ уравненіе, черезъ одну тригонометрическую функцію, входящую въ уравненіе или не входящую въ него. Всѣ эти выраженія будутъ, какъ видѣли, *алгебраическія* относительно этой функціи. Подставляя эти выраженія, вмѣсто соотвѣтственныхъ функцій, въ предложенное уравненіе, получаемъ алгебраическое уравненіе, содержащее только одну тригонометрическую функцію, искомыя значенія которой, одно или нѣсколько, найдемъ, рѣшая это уравненіе способами, указанными въ алгебрѣ. Зная значенія тригонометрической функціи, получимъ значенія аргумента, соотвѣтствующія каждому изъ найденныхъ значеній функціи (**270**). Число этихъ значеній безгранично велико, причемъ одно изъ нихъ придется, вообще, вычислять при помощи таблицъ.

Простота рѣшенія и изслѣдованія зависитъ, главнымъ образомъ, отъ удачнаго выбора той функціи, въ которой выражены всѣ остальныя. Здѣсь нельзя дать никакихъ общихъ правилъ. Ограничимся нѣкоторыми указаніями, полезными въ огромномъ числѣ случаевъ.

1°. Если, послѣ выраженія всѣхъ функцій черезъ одну, уравненіе будетъ содержать квадратные корни, подъ знаками коихъ будетъ входить выбранная функція, то придется возвышать въ квадраты, что можетъ ввести *посторонния рѣшенія.* Должно изслѣдовать, введены ли они.

2°. Если выбранная функція есть *синусъ* или *косинусъ*, то корни алгебраическаго уравненія, дающія значенія этой функціи, должны быть заключены въ области $(-1, +1)$.

3°. Если выбранная функція есть *тангенсъ (котангесъ)*, то всякое вещественное значеніе корня уравненія можетъ быть принято, ибо тангенсъ можетъ имѣть всякое значеніе; разумѣется— если корни не должны удовлетворять какимъ-нибудь дополнительнымъ условіямъ.

4°. Если уравненіе содержитъ тригонометрическія функціи только аргумента x и не содержитъ ихъ подъ знаками корней, то, выражая всѣ функціи въ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получимъ уравненіе раціональное относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ибо, какъ видѣли (**293**), всѣ тригонометрическія функціи аргумента x выражаются раціонально въ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

296. Уравненіе $a\sin x+b\cos x=c$.—Приложимъ всѣ эти указанія къ рѣшенію уравненія:

$$a\sin x+b\cos x=c, \tag{1}$$

которое должно замѣтить.

Первая метода.—Принимаемъ за неизвѣстное $\sin x$. Замѣняя $\cos x$ посредствомъ $\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$, получимъ:

$$a\sin x\pm b\sqrt{1-\sin^2 x}=c, \quad \text{или} \quad \pm b\sqrt{1-\sin^2 x}=c-a\sin x.$$

Возвышая въ квадратъ обѣ части этого уравненія и принимая во вниманіе, что это возвышеніе не вводитъ постороннихъ рѣшеній вслѣдствіе двойного знака при корнѣ, получимъ уравненіе:

$$b^2(1-\sin^2 x)-(c-a\sin x)^2=0, \tag{2}$$

или

$$(a^2+b^2)\sin^2 x-2ac\sin x+c^2-b^2=0, \tag{3}$$

равносильное данному.

Изслѣдованіе.—Корни уравненія (3) должны быть:

1°. вещественны и 2°. принадлежать области $(-1, +1)$. Для вещественности корней необходимо и достаточно, чтобы

$$a^2c^2-(a^2+b^2)(c^2-b^2)\geqslant 0, \quad \text{или} \quad b^2(a^2+b^2-c^2)\geqslant 0;$$

такъ какъ $b^2>0$, то неравенство это равносильно такому:

$$a^2+b^2\geqslant c^2. \tag{4}$$

Если условіе (4) соблюдено, то корни лежатъ въ области $(-1, +1)$, ибо, какъ показываетъ уравненіе (2),

$$1-\sin^2 x=\frac{(c-a\sin x)^2}{b^2}\geqslant 0, \text{ т.-е. } \sin^2 x\leqslant 1,$$

и, слѣдовательно,

$$-1\leqslant \sin x\leqslant 1.$$

Единственнымъ, слѣдовательно, условіемъ возможности задачи является условіе (4).

Рѣшеніе.—Рѣшая уравненіе (3), найдемъ:

$$\sin x=\frac{ac\pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

Требуется опредѣлить x. Для сей цѣли находимъ два числа α и β, синусы коихъ были бы таковы

$$\sin\alpha=\frac{ac+b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}, \quad \sin\beta=\frac{ac-b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

Эти два числа могутъ быть вычислены при помощи таблицъ. И въ самомъ дѣлѣ, если значеніе $\sin\alpha$ положительное, то по таблицамъ найдемъ острый уголъ A, синусъ коего равенъ значенію $\sin\alpha$, и за число α принимаемъ тригонометрическій уголъ, соотвѣтствующій углу A. Если значеніе $\sin\alpha$ отрицательное, то значеніе $\sin(-\alpha)$ будетъ положительное; отыскиваемъ по таблицамъ острый уголъ A, синусъ коего былъ бы равенъ значенію $\sin(-\alpha)$, и за число α принимаемъ тригонометрическій уголъ, соотвѣтствующій острому отрицательному углу $(-A)$.

Такимъ же образомъ опредѣлимъ β. Всѣ числа x, удовлетворяющія уравненію (3), будутъ заключены въ формулахъ:

$$x=(-1)^n\alpha+n\pi, \qquad x=(-1)^n\beta+n\pi, \tag{5}$$

Не слѣдуетъ, однако, думать, что всѣ эти рѣшенія удовлетворяютъ уравненію (1), ибо хотя и не введены *посторонніе* значенія *для* $\sin x$, но введены посторонніе значенія для *числа* x. И въ самомъ дѣлѣ, взявъ уравненіе:

$$a\sin x - b\cos x = c, \tag{1'}$$

получимъ для него уравненіе въ $\sin x$, совершенно одинаковое съ уравненіемъ (3).

Слѣдовательно, одни изъ значеній x, удовлетворяющихъ уравненію (3), т.-е. одни изъ значеній (5), удовлетворяютъ уравненію (1), другія—уравненію (1'). Какія же изъ значеній (5) удовлетворяютъ уравненію (1)? Для рѣшенія вопроса напишемъ каждую изъ формулъ (5) въ двухъ видахъ:

$$\left.\begin{array}{ll} x = \alpha + 2k\pi, & x = \pi - \alpha + 2k\pi, \\ x = \beta + 2k\pi, & x = \pi - \beta + 2k\pi. \end{array}\right\} \tag{5'}$$

Синусы чиселъ α и $\pi - \alpha$ равны; косинусы же ихъ равны только по модулю, но противоположны по знакамъ. Принимая во вниманіе, что знаки у $\cos x$ въ уравненіяхъ (1) и (1') различны, заключаемъ, что одно изъ чиселъ: α и $\pi - \alpha$ удовлетворяетъ уравненію (1), другое уравненію —(1'); то же самое замѣчаніе относится и къ числамъ: β и $\pi - \beta$. Назвавъ то изъ чиселъ: α и $\pi - \alpha$ и то изъ чиселъ: β и $\pi - \beta$, которыя удовлетворяютъ уравненію (1), соотвѣтственно буквами. γ и δ, получимъ, на основаніи формулъ (5'), что всѣ рѣшенія уравненія (1) заключены въ формулахъ:

$$x = \gamma + 2k\pi, \qquad x = \delta + 2k\pi,$$

гдѣ k произвольное цѣлое.

Замѣтимъ, что для вычисленія значеній α и β должно формулы для $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ сдѣлать предварительно логариѳмическими.

Вторая метода.—Выражая $\sin x$ и $\cos x$ въ $\operatorname{tg} x$ (**277**), преобразуетъ данное уравненіе въ такое:

$$a\operatorname{tg} x + b = \pm c\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}. \tag{1}$$

Такъ какъ правая часть этого уравненія имѣетъ двойной знакъ, то возвышеніе въ квадратъ обѣихъ частей уравненія не введетъ *постороннихъ* значеній для $\operatorname{tg} x$ и дастъ:

$$(a^2 - c^2)\operatorname{tg}^2 x + 2ab\operatorname{tg} x + b^2 - c^2 = 0. \tag{2}$$

Изслѣдованіе.—Такъ какъ корни этого уравненія, если они вещественны, должны быть значеніями $\operatorname{tg} x$, а для тангенса допустимы всякія вещественныя значенія, то, для возможности задачи, необходимо и достаточно, чтобы корни этого уравненія были вещественны, т.-е. чтобы было удовлетворено условіе:

$$a^2b^2 - (a^2 - c^2)(b^2 - c^2) \geqslant 0, \quad \text{или} \quad c^2(a^2 + b^2 - c^2) \geqslant 0,$$

равносильное условію:

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2.$$

Рѣшеніе.—Рѣшая уравненіе (2), получимъ:

$$\operatorname{tg} x = \frac{-ab \pm c\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 - c^2}.$$

Требуется опредѣлить теперь всѣ значенія для x. Для сей цѣли находимъ два числа α и β, тангенсы коихъ были бы таковы:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-ab + c\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 - c^2}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{-ab - c\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 - c^2}.$$

Эти два числа могутъ быть вычислены при помощи таблицъ.

Всѣ значенія x, удовлетворяющія уравненію (2), будутъ заключены въ формулахъ:

$$x = \alpha + n\pi, \qquad x = \beta + n\pi, \tag{3}$$

гдѣ n произвольное цѣлое.

Не слѣдуетъ, однако, думать, что всѣ эти рѣшенія удовлетворяютъ уравненію (1): хотя и не введены постороннія значенія *для* $\operatorname{tg} x$, но введены постороннія значенія для *числа* x.

И въ самомъ дѣлѣ, взявъ уравненіе:

$$-a\sin x - b\cos x = c, \tag{1'}$$

получимъ для него уравненіе въ $\operatorname{tg} x$, совершенно одинаковое съ уравненіемъ (2). Слѣдовательно, одни изъ значеній (3) удовлетворяютъ уравненію (1), другія — уравненію (1′). Какія же изъ значеній (3) удовлетворяютъ уравненію (1)?

Для рѣшенія вопроса напишемъ каждую изъ формулъ (3) въ двухъ видахъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2k\pi + \alpha, \quad & x &= 2k\pi + (\pi + \alpha); \\ x &= 2k\pi + \beta, \quad & x &= 2k\pi + (\pi + \beta). \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Принимая во вниманіе, что синусы и косинусы чиселъ: α и $\pi+\alpha$ равны, соотвѣтственно, по модулю, но противоположны по знакамъ, и что знаки у $\sin x$ и $\cos x$ въ уравненіи (1′) противоположны знакамъ у $\sin x$ и $\cos x$ въ уравненіи (1), заключаемъ, что одно изъ чиселъ: α и $(\pi+\alpha)$ удовлетворяетъ уравненію (1), другое— уравненію (1′). То же самое замѣчаніе относится и къ числамъ: β и $\pi+\beta$. Назвавъ то изъ чиселъ: α и $\pi+\alpha$ и то изъ чиселъ: β и $\pi+\beta$, которыя удовлетворяютъ уравненію (1), соотвѣтственно буквами: γ и δ, получимъ, на основаніи формулъ (5′), что всѣ рѣшенія уравненія (1) заключены въ формулахъ:

$$x=\gamma+2k\pi,\qquad x=\delta+2k\pi,$$

гдѣ k произвольное цѣлое.

Третья метода. — Выражая $\sin x$ и $\cos x$ въ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (**293**), преобразуемъ предложенное уравненіе въ таковое:

$$(b+c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c-b=0. \qquad (1)$$

Изслѣдованіе. — Для того, чтобы предложенное уравненіе имѣло рѣшеніе, необходимо и достаточно, чтобы уравненіе (1) имѣло вещественные корни, т.-е. чтобы существовало условіе:

$$a^2-(c-b)(c+b)\geqslant 0,$$

или

$$a^2+b^2\geqslant c^2.$$

Рѣшеніе.—Рѣшая уравненіе (1), получимъ:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}.$$

Находимъ два числа α и β, тангенсы коихъ были бы таковы:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c},\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{a-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}.$$

Эти два числа легко вычислить при помощи таблицъ. И въ самомъ дѣлѣ, если $\operatorname{tg}\alpha$ есть положительное число, то по таблицамъ находимъ острый уголъ A, тангенсъ котораго былъ бы равенъ $\operatorname{tg}\alpha$, и соотвѣтствующій ему тригонометрическій уголъ можетъ быть принятъ за α; если $\operatorname{tg}\alpha$ есть отрицательное число, то по таблицамъ

находимъ острый уголъ B, тангенсъ коего былъ бы равенъ $-\operatorname{tg}\alpha$, и тригонометрическій уголъ, соотвѣтствующій тупому углу $180^0 - B$, можетъ быть принятъ за α. Такимъ же образомъ можетъ быть вычислено число β. Вычисливъ числа α и β, найдемъ для $\frac{x}{2}$ всѣ значенія по формуламъ:

$$\frac{x}{2} = k\pi + \alpha, \qquad \frac{x}{2} = k\pi + \beta,$$

откуда

$$x = 2k\pi + 2\alpha, \qquad x = 2k\pi + 2\beta.$$

Замѣчаніе. Метода эта, по сравненію съ двумя предыдущими, приводитъ къ болѣе простому изслѣдованію по двумъ причинамъ: 1) тангенсъ можетъ принимать всевозможныя значенія и 2) отсутствіе возвышенія въ квадратъ не вводитъ постороннихъ рѣшеній.

Четвертая метода.—Въ практическомъ отношеніи предыдущія методы неудобны, ибо формулы рѣшенія требуютъ, для приведенія ихъ въ логариѳмическій видъ, нѣсколькихъ вспомогательныхъ угловъ. Методы эти были изложены исключительно съ цѣлью показать приложеніе указанныхъ выше общихъ замѣчаній.

Нижеслѣдующая метода болѣе удобна въ практическомъ отношеніи.

Написавъ предложенное уравненіе въ видѣ:

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$$

и положивъ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \tag{1}$$

легко приведемъ уравненіе къ виду:

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi. \tag{2}$$

Вычисляемъ сперва число φ по формулѣ (1) и, вслѣдъ за симъ, по формулѣ (2) число $x + \varphi$ и, слѣдовательно, x.

Изслѣдованіе. Необходимо, чтобы модуль значенія для $\sin(x + \varphi)$, даваемаго формулою (2), не превышалъ 1. Должны, слѣдовательно, имѣть:

$$\left|\frac{c}{a}\cos\varphi\right| \leqslant 1, \text{ или, равносильно, } \frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi \leqslant 1.$$

Выражая $\cos^2\varphi$ въ $\operatorname{tg}^2\varphi$ и подставляя, вмѣсто $\operatorname{tg}\varphi$, число $\frac{b}{a}$, легко приведемъ предыдущее условіе къ таковому:

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2.$$

Рѣшеніе. — Находимъ число α, синусъ коего былъ бы таковъ:

$$\sin\alpha = \frac{c}{a}\cos\varphi.$$

Число это можетъ быть вычислено при помощи таблицъ. Вычисливъ его, получимъ:

$$x + \varphi = (-1)^n\alpha + n\pi,$$

откуда

$$x = (-1)^n\alpha + n\pi - \varphi.$$

Представивъ эту формулу въ двухъ видахъ:

$$x = 2k\pi + (\alpha - \varphi), \quad x = 2k\pi + (\pi - \alpha - \varphi),$$

получимъ рѣшенія въ тѣхъ же формахъ, въ какихъ имѣли ихъ при предыдущихъ методахъ.

Примѣръ.—*Требуется рѣшить уравненіе:*

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Слѣдуя четвертой методѣ, положимъ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = 1, \text{ откуда } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Уравненіе (2) дастъ:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2},$$

а потому $\alpha = \frac{\pi}{6}$, и

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{12}, \quad x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12}.$$

287. Геометрическое истолкованіе предыдущаго уравненія. — Разсмотримъ кругъ, уравненіе котораго, отнесенное къ центру, таково:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

и прямую, уравненіе которой есть

$$ax+by=c.$$

Для того, чтобы найти точки пересѣченія прямой и круга, если онѣ существуютъ, достаточно рѣшить систему, образованную двумя предыдущими уравненіями. Но можно поступить такъ: обозначимъ буквою φ углы, положительные или отрицательные, составляемые съ осью OX радіусами, проходящими черезъ точки пересѣченія; координаты искомыхъ точекъ M пересѣченія будутъ таковы:

$$x=\cos\varphi, \qquad y=\sin\varphi;$$

онѣ удовлетворяютъ первому уравненію и должны удовлетворять второму, которое преобразуется въ таковое:

$$a\sin\varphi+b\cos\varphi=c.$$

Уравненіе это и есть разсмотрѣнное уравненіе

$$a\sin x+b\cos x=c,$$

только въ немъ буква x замѣнена буквою φ.

Итакъ, рѣшенія этого уравненія суть не что иное, какъ углы, образуемые съ осью x-овъ радіусами, проходящими черезъ точки пересѣченія даннаго круга съ данною прямою.

298. Задача. — Рѣшить уравненіе:

$$a\operatorname{tg}x+b\operatorname{cotg}x=c. \tag{1}$$

Выражая $\operatorname{cotg}x$ въ $\operatorname{tg}x$, получимъ:

$$a\operatorname{tg}^2x-c\operatorname{tg}x+b=0, \tag{2}$$

уравненіе второй степени въ $\operatorname{tg}x$.

Изслѣдованіе.—Для того, чтобы уравненіе (1) имѣло рѣшенія, необходимо и достаточно, чтобы уравненіе (2) въ $\operatorname{tg}x$ имѣло корни, т.-е. чтобы

$$c^2-4ab\geqslant 0. \tag{3}$$

Рѣшеніе.—Если условіе (3) выполнено, то для $\operatorname{tg}x$ получимъ два значенія:

$$\operatorname{tg}x=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4ab}}{2a}.$$

Вычисливъ, при помощи таблицъ, два числа α и β, тангенсы коихъ были бы таковы:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \tag{4}$$

получимъ для x слѣдующія значенія:

$$x = k\pi + \alpha, \quad x = k\pi + \beta.$$

Чтобы сдѣлать формулы (4) логариѳмическими, достаточно поступить такъ, какъ поступали въ первой части этого курса при рѣшеніи общаго уравненія второй степени (**107**).

299. Задача.—Рѣшить уравненіе:

$$\sin x + \cos x = 2\sin x\cos x. \tag{1}$$

Возвышая обѣ части уравненія въ квадратъ, получимъ:

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 4\sin^2 x\cos^2 x.$$

Принимая во вниманіе, что

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad 2\sin x\cos x = \sin 2x,$$

преобразуемъ уравненіе въ таковое:

$$\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0, \tag{2}$$

представляющее квадратное уравненіе въ $\sin 2x$.

Изслѣдованіе.—Оно имѣетъ вещественные корни, ибо послѣдній членъ отрицательный. Корни имѣютъ противоположные знаки, ибо произведеніе ихъ отрицательно, причемъ модуль одного корня > 1, а модуль другого < 1, ибо произведеніе ихъ равно -1, причемъ сумма неравна 0. Принимая во вниманіе, что сумма корней есть положительное число, равное 1, заключаемъ, что модуль положительнаго корня болѣе модуля отрицательнаго, т. е. онъ > 1, и, слѣдовательно, не можетъ быть принятъ, ибо долженъ представлять одно изъ значеній $\sin 2x$, которое не можетъ быть > 1.

Итакъ, должно разсмотрѣть только отрицательный корень.

Рѣшеніе.—Этотъ отрицательный корень есть:

$$\sin 2x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Обозначивъ черезъ 2α число, заключенное между $-\frac{\pi}{2}$ и 0, синусъ коего равенъ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, получимъ

$$2x = (-1)^n \cdot 2\alpha + n\pi,$$

откуда

$$x = (-1)^n\alpha + n \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad (3)$$

гдѣ α заключено между $-\frac{\pi}{4}$ и 0.

Не должно думать однако, что всѣ эти x непремѣнно удовлетворяютъ предложенному уравненію: оно возвышалось въ квадратъ, и, слѣдовательно, могли быть введены постороннія рѣшенія.

Замѣтивъ, что уравненіе (2) получается отъ возвышенія въ квадратъ и уравненія

$$\sin x + \cos x = -2\sin x \cos x, \qquad (1')$$

и принявъ во вниманіе, что правыя части уравненій (1) и (1') суть соотвѣтственно $\sin 2x$ и $-\sin 2x$, причемъ $\sin 2x < 0$, должны выбрать изъ формулы (3) тѣ значенія для x, которыя обращаютъ лѣвую часть уравненія (1) въ отрицательное число, т.-е. удовлетворяютъ неравенству:

$$\sin x + \cos x < 0,$$

или равносильному неравенству (**240**):

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0.$$

Подставивъ сюда, вмѣсто x, его значеніе (3), получимъ:

$$\cos\left[n \cdot \frac{\pi}{2} + (-1)^n\alpha - \frac{\pi}{4}\right] < 0. \qquad (4)$$

1. *Если n = четное* $= 2k$, то неравенсто это перепишется такъ:

$$(-1)^k \cos\left[\alpha - \frac{\pi}{4}\right] < 0,$$

что равносильно неравенству:

$$(-1)^k < 0, \qquad (5)$$

ибо $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) > 0$, такъ какъ $\alpha - \frac{\pi}{4}$ заключено между $-\frac{\pi}{2}$ и 0.

Неравенство (5) будетъ удовлетворено только тогда, когда $k =$ нечетное $= 2p+1$.

Итакъ, *если, въ формулѣ* (3), $n = 2(2p+1) = 4p+2$, *то x удовлетворетъ уравненію* (1).

2. Если n — нечетное $= 2k+1$, то неравенство (4) перепишется такъ:

$$(-1)^{k+1}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) < 0,$$

которое равносильно таковому:

$$(-1)^{k-1} > 0. \qquad (5)$$

Неравенство это удовлетворено тогда, когда k — нечетное $= 2p+1$.

Итакъ, *если, въ формулѣ* (3), $n = 2(2p+1)+1 = 4p+3$, *то x удовлетворетъ уравненіе* (1)

Слѣдовательно, всѣ рѣшенія уравненія (1) суть:

$$x = (-1)^{4p+2}\alpha + (4p+2)\frac{\pi}{2} = (2p+1)\pi + \alpha,$$

$$x = (-1)^{4p+3}\alpha + (4p+3)\frac{\pi}{2} = (2p+1)\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

300. Особые пріемы при рѣшеніи тригонометрическихъ уравненій.—Предыдущія задачи даютъ примѣры приложенія общей методы. Но уже при рѣшеніи первой задачи былъ данъ особый и болѣе простой пріемъ.

Слѣдующая задача даетъ новый примѣръ особаго пріема.

Задача.—Рѣшить уравненіе:

$$\sin px = \sin qx, \qquad (1)$$

гдѣ p и q суть данныя числа.

Уравненіе (1) говоритъ, что числа: px и qx должны имѣть одинъ и тотъ же синусъ; слѣдовательно, они связаны между собою уравненіемъ:

$$px = (-1)^n qx + n\pi, \qquad (2)$$

гдѣ n произвольное цѣлое. Сдѣлавъ послѣдовательно n четнымъ $= 2k$ и нечетнымъ $= 2k+1$, получимъ два уравненія:

$$(p-q)x = 2k\pi, \qquad (p+q)x = (2k+1)\pi. \qquad (2)$$

Изслѣдованіе. — 1. Если $p = q$, то первое уравненіе напишется такъ:

$$0 \cdot x = 2k\pi;$$

оно возможно только при $k = 0$ и тогда оно удовлетворено при *всякомъ* значеніи x. Съ другой стороны, видимъ, что при предположеніи: $p = q$ уравненіе (1) обращается въ тождество

$$\sin px = \sin px,$$

которому, слѣдовательно, удовлетворяетъ *всякое* значеніе x.

2. Если $p = -q$, то второе уравненіе невозможно ни при какомъ x, ибо, ни при какомъ цѣломъ k, число $(2k+1)$ не можетъ быть равно нулю.

Рѣшеніе. Уравненія (2) даютъ рѣшенія:

$$x = \frac{2k\pi}{p-q}, \qquad x = \frac{(2k+1)\pi}{p+q}.$$

Замѣчаніе 1. Такимъ же пріемомъ могутъ быть рѣшены уравненія:

$$\cos px = \cos qx, \qquad \operatorname{tg} px = \operatorname{tg} qx, \qquad \cos px = \sin qx.$$

Замѣчаніе 2. — Если p и q суть числа натуральныя, то можно приложить общую методу, выражая $\sin(px)$ и $\cos(qx)$ въ $\sin x$ и приведя, слѣдовательно, уравненіе къ алгебраическому уравненію относительно $\sin x$.

Это уравненіе въ $\sin x$ будетъ достаточно сложное. Принимая, однако, во вниманіе, что корни его опредѣлены заранѣе изложенною методою, придемъ къ интереснымъ результатамъ. Разсмотримъ, напримѣръ, уравненіе:

$$\sin 5x = \sin 3x. \qquad (1)$$

Выражая $\sin 3x$ и $\sin 5x$ въ $\sin x$ (283), получимъ уравненіе:

$$\sin x[16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 2] = 0,$$

которое распадается на два:

$$(2) \qquad \sin x = 0, \qquad 16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 2 = 0. \qquad (3)$$

Съ другой стороны, изложенная метода даетъ всѣ рѣшенія уравненія (1).

$$x = k\pi, \qquad x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

Первая группа соотвѣтствуетъ уравненію (2), вторая группа — уравненію (3).

Итакъ, назвавъ $\sin x = z$, получимъ, что *биквадратное уравненіе*:

$$16z^4 - 16z^2 + 2 = 0$$

имѣетъ четыре рѣшенія:

$$z_1 = \sin\frac{\pi}{8}, \quad z_2 = \sin\frac{3\pi}{8}, \quad z_3 = \sin\frac{5\pi}{8}, \quad z_4 = \sin\frac{7\pi}{8}.$$

§ II Системы тригонометрическихъ уравненій.

301. Общая метода рѣшенія.—Если уравненія, составляющія систему, содержатъ только тригонометрическіе элементы неизвѣстныхъ чиселъ, но не самыя числа, или тригонометрическіе элементы *сложныхъ* чиселъ, составленныхъ изъ неизвѣстныхъ, напр. $\sin(x+y)$, $\sin\left(\frac{x}{2}+2y\right)$ и т. д., то къ системѣ этой, для ея рѣшенія, можно примѣнить, безъ измѣненій, указанные выше общіе способы (**295**).

Такъ, напр., если система двухъ уравненій содержитъ тригонометрическіе элементы двухъ неизвѣстныхъ чиселъ: x и y, то можемъ выразить эти элементы въ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ и получимъ систему алгебраическихъ уравненій съ двумя неизвѣстными: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$.

Нѣкоторыя системы, не имѣющія, на первый взглядъ, указаннаго сейчасъ вида, могутъ быть приводимы къ нему при помощи простыхъ преобразованій. Такъ, напр., если система содержитъ $\cos(x+y)$, то можемъ замѣнить этотъ элементъ формулою:

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y$$

съ цѣлью отдѣлить тригонометрическіе элементы чиселъ x и y.

302. Задача.—Рѣшить систему двухъ уравненій:

$$(1) \qquad \begin{cases} a\ \ \operatorname{tg}x + b\ \ \operatorname{tg}y = c, \\ a_1 \operatorname{cotg}x + b_1 \operatorname{cotg}y = c_1. \end{cases}$$

Вводя вспомогательныя неизвѣстныя:

$$X = \operatorname{tg}x, \qquad Y = \operatorname{tg}y,$$

преобразуемъ систему въ таковую:

$$(2) \qquad \begin{cases} aX + bY = c, \\ \frac{a_1}{X} + \frac{b_1}{Y} = c_1. \end{cases}$$

Выводя изъ перваго уравненія

$$(3) \qquad Y = \frac{c - aX}{b}$$

и подставляя во второе, получимъ:

$$(4) \qquad ac_1 X^2 + (bb_1 - aa_1 - cc_1) X + a_1 c = 0.$$

Изслѣдованіе.—Для того, чтобы система (1) имѣла рѣшенія, необходимо и достаточно, чтобы уравненіе (4) имѣло таковыя, т.-е. чтобы

$$(bb_1 - aa_1 - cc_1)^2 - 4aa_1 cc_1 \geqslant 0,$$

или

$$(5) \qquad a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 + c^2 c_1^2 - 2bb_1 cc_1 - 2cc_1 aa_1 - 2aa_1 bb_1 \geqslant 0.$$

Если это условіе выполнено, то уравненіе (4) имѣетъ два рѣшенія: X_1 и X_2, коимъ соотвѣтствуютъ значенія: Y_1 и Y_2, получаемыя для Y по формулѣ (3). Рѣшенія системы (1) получимъ, составляя системы изъ значеній для x и y, удовлетворяющихъ той или другой изъ двухъ системъ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = X_1, \\ \operatorname{tg} y = Y_1 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = X_2, \\ \operatorname{tg} y = Y_2. \end{array} \right.$$

303. Замѣчаніе. — Предыдущая метода, хотя и приложимая, *по своему основанію,* ко всякой системѣ, содержащей только отдѣленные тригонометрическіе элементы чиселъ, приводитъ часто къ исчисленіямъ очень труднымъ и иногда непреодолимымъ.

Должно тогда стараться преобразовать систему въ болѣе удобную форму. Преобразованіе это, вообще, представляетъ чисто искусственный пріемъ, и нельзя указать общаго правила для подобныхъ преобразованій.

Дадимъ примѣръ.

Задача.—*Рѣшить систему.*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cos x + \cos y = a, \\ \sin x + \sin y = b. \end{array} \right.$$

Если приложимъ къ этой системѣ указанную выше методу, взявъ, напр., за вспомогательныя неизвѣстныя $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$, то придемъ къ двумъ очень сложнымъ системамъ, рѣшеніе коихъ зависитъ отъ рѣшенія уравненія 4-й степени.

Но вотъ какимъ образомъ можно поступить.

Написавъ систему въ видѣ:

$$(2)\qquad \begin{cases} 2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=a, \\ 2\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}=b, \end{cases}$$

раздѣлимъ ея уравненія по частямъ и получимъ.

$$(3)\qquad \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b}.$$

Уравненіе это даетъ: $\frac{x+y}{2}$. Зная $\frac{x+y}{2}$, найдемъ, при помощи одного изъ уравненій системы (2), $\frac{x-y}{2}$. Будемъ имѣть, напримѣръ,

$$(4)\qquad \cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2\cos\frac{x+y}{2}}.$$

Изслѣдованіе. — Значеніе (3) для $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ можетъ быть принято всегда. Для того, чтобы значеніе $\cos\frac{x-y}{2}$, даваемое формулою (4), могло быть принято, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{a^2}{4\cos^2\frac{x+y}{2}}\leqslant 1.$$

Условіе это преобразовывается, при помощи уравненія (3), въ таковое:

$$(5)\qquad \frac{a^2+b^2}{4}\leqslant 1.$$

Рѣшеніе. — Положимъ, что условіе (5) выполнено. Назвавъ буквою α число, тангенсъ котораго былъ бы равенъ $\frac{a}{b}$, получимъ для $\frac{x+y}{2}$, на основаніи уравненія (3), формулу:

$$(6)\qquad \frac{x+y}{2}=\alpha+k\pi.$$

Уравненіе (4) даетъ:

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2\cos(\alpha+k\pi)}=\frac{a}{2.(-1)^k\cos\alpha}=(-1)^k\frac{a}{2\cos\alpha}.$$

Назвавъ буквою β число, косинусъ котораго былъ бы равенъ $\frac{a}{2\cos\alpha}$, получимъ:

$$\cos\frac{x-y}{2}=(-1)^k\cos\beta=\cos(k\pi+\beta),$$

отсюда

$$\frac{x-y}{2}=2h\pi\pm k\pi\pm\beta,$$

гдѣ h произвольное цѣлое, или, такъ какъ k произвольное цѣлое,

$$(7)\qquad \frac{x-y}{2}=2h\pi+k\pi\pm\beta.$$

Равенства (6) и (7) даютъ:

$$\begin{cases} x=2\pi(h+k)\pm\beta+\alpha, \\ y=-2\pi h\qquad\quad\ \mp\beta+\alpha, \end{cases}$$

или, такъ какъ h и k *произвольныя* цѣлыя,

$$\begin{cases} x=2p\pi\pm\beta+\alpha, \\ y=2q\pi\mp\beta+\alpha, \end{cases}$$

гдѣ p и q произвольныя цѣлыя, причемъ верхніе (нижніе) знаки при β соотвѣтствуютъ.

304. Случаи, когда сами неизвѣстныя входятъ въ уравненія.—Нельзя указать общей методы рѣшенія, если неизвѣстныя входятъ въ уравненія не только подъ знаками тригонометрическихъ функцій, но и алгебраически.

Наиболѣе встрѣчающійся случай, особенно при рѣшеніи треугольниковъ, когда *требуется вычислить два числа по данной суммѣ или разности ихъ и по данному соотношенію между тригонометрическими элементами этихъ чиселъ.*

Положимъ, напр., что извѣстна сумма двухъ неизвѣстныхъ чиселъ:

$$x+y=a.$$

Постараемся вычислить $x-y$ или $\frac{x-y}{2}$. Полагая

$$x-y=z,$$

найдемъ:

$$x=\frac{a+z}{2}, \quad y=\frac{a-z}{2}.$$

Внося эти значенія въ данное тригонометрическое соотношеніе, будемъ имѣть уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ z

Если дана разность $x-y$, то вычисляемъ $x+y=z$.

Дадимъ два примѣра этого типа.

305. Задача.—Рѣшить систему:

$$(1) \qquad \begin{cases} x+y=a, \\ \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{m}{p}. \end{cases}$$

Вычислимъ $\frac{x-y}{2}$. Второе уравненіе даетъ:

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{m-p}{m+p},$$

или (**242**)

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}=\frac{m-p}{m+p}.$$

Система (1) можетъ быть замѣнена равносильною:

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{x+y}{2}=\frac{a}{2}, \\ \operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{m-p}{m+p}\operatorname{tg}\frac{a}{2}. \end{cases}$$

Такъ какъ тангенсъ можетъ принимать всевозможныя значенія, то система имѣетъ рѣшенія. Назвавъ буквою α какое-нибудь число, для котораго

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m-p}{m+p}\operatorname{tg}\frac{a}{2},$$

получимъ:

$$\frac{x-y}{2}=\alpha+k\pi.$$

Всѣ рѣшенія системы (2) суть:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \alpha + k\pi, \\ y = \frac{a}{2} - \alpha - k\pi, \end{cases}$$

гдѣ k произвольное цѣлое.

306. Задача. — Рѣшить систему:

(1) $$\begin{cases} x - y = a, \\ \cos x \cdot \cos y = b. \end{cases}$$

Вычислимъ $x + y$. Принимая во вниманіе, что (**239**)

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right],$$

и принимая во вниманіе первое уравненіе системы (1), перепишемъ второе уравненіе ея такъ:

(2) $$\cos(x+y) = 2b - \cos a.$$

Изслѣдованіе. Для того, чтобы система (1) была возможна, необходимо, чтобы

$$-1 \leqslant \cos(x+y) \leqslant 1, \text{ что равносильно } \cos^2(x+y) \leqslant 1.$$

Неравенство это, на основаніи уравненія (2), даетъ условіе возможности:

(3) $$(2b - \cos a)^2 \leqslant 1.$$

Если условіе (3) выполнено, то уравненіе (2) даетъ для $(x + y)$ значенія, заключенныя въ формулѣ:

$$x + y = 2k\pi \pm \alpha.$$

Итакъ, получаемъ:

$$\begin{cases} x = \frac{a \pm \alpha}{2} + k\pi, \\ y = \frac{-a \pm \alpha}{2} + k\pi, \end{cases}$$

гдѣ k произвольное цѣлое, причемъ верхніе (нижніе) знаки при α соотвѣтствуютъ.

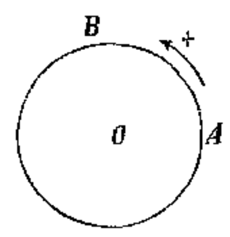
ГЛАВА VI.

Тригонометрическіе элементы дугъ и угловъ.

§ I. Дуги.

307. Обобщеніе понятія о дугѣ окружности круга. — Разсмотримъ кругъ *произвольнаго* радіуса и возьмемъ на окружности этого круга двѣ точки A и B (черт. 39).

Черт. 39



Дугою окружности, *имѣющею* **начало** *въ точкѣ A и* **конецъ** *въ точкѣ B, называется* **путь,** *который опишетъ точка, движущаяся по окружности* **въ одну сторону,** *въ ту или другую, выходя изъ точки A и останавливаясь въ точкѣ B.*

Путь этотъ можетъ состоять или только изъ одной геометрической дуги AB [1]), или изъ нѣсколькихъ окружностей и геометрической дуги AB. Такимъ путемъ будетъ, напримѣръ, путь, описываемый концомъ часовой или минутной стрѣлки.

Длиною *дуги называется сумма* **длинъ**: *геометрической дуги и окружностей, описанныхъ движущеюся точкою.*

Если даны: начало дуги, ея длина и направленіе движенія точки, описывающей эту дугу, то дуга опредѣлена, и, слѣдовательно, опредѣленъ ея конецъ.

Обратное предложеніе было бы несправедливо.

И въ самомъ дѣлѣ, *данному концу соотвѣтствуетъ двойное безконечно большое число дугъ:* однѣ изъ этихъ дугъ образованы геометрическою дугою AB и произвольнымъ числомъ окружностей,

---

[1]) *Геометрическою* дугою AB называется часть окружности, ограниченная точками A и B.

описанныхъ въ направленіи, указанномъ стрѣлкою; другія образованы геометрическою дугою AB и произвольнымъ числомъ окружностей, описанныхъ въ противоположномъ направленіи.

Дуги, описываемыя въ одномъ направленіи, считаются **положительными**, въ противоположномъ—**отрицательными**.

Въ соотвѣтствіе съ этимъ опредѣленіемъ та изъ двухъ геометрическихъ дугъ AB, которая описывалась бы движущеюся точточкою въ положительномъ направлени, считается *положительною* геометрическою дугою, другая — *отрицательною*.

Положительная геометрическая дуга, имѣющая началомъ точку A и концомъ точку B, называется *соотвѣтственною* всякой дугѣ, имѣющей то же начало A и тотъ же конецъ B.

Въ послѣдующемъ изложеніи будемъ принимать за *направленіе положительныхъ дугъ направленіе, обратное направленію движенія часовой стрѣлки.*

Изъ установленнаго выше **обобщеннаго** понятія о дугѣ окружности вытекаетъ, что **абсолютная длина перемѣнной дуги способна принимать всевозможныя значенія.**

308 Измѣреніе дугъ. — *Числомъ, измѣряющимъ дугу, называется положительное или отрицательное число, модуль котораго измѣряетъ длину этой дуги. Число это есть число* **положительное**, *если измѣряемая дуга положительная, и* **отрицательное**, *если дуга отрицательная.*

Изъ этого опредѣленія и изъ понятія о дугѣ слѣдуетъ, что *число, измѣряющее длину* **перемѣнной** *дуги, можетъ принимать всякое значеніе, какъ положительное, такъ и отрицательное.*

1°. Разсмотримъ *положительную* дугу AB, образованную положительною геометрическою дугою AB и n положительными окружностями.

Возьмемъ какую-нибудь единицу мѣры и назовемъ числа, измѣряющія длины: положительной геометрической дуги AB и положительной окружности, соотвѣтственно буквами: α_1 и C.

По опредѣленію, число α, измѣряющее дугу AB, будетъ таково:

$$\alpha = \alpha_1 + nC. \tag{1}$$

2°. Разсмотримъ *отрицательную* дугу AB, образованную отрицательною геометрическою дугою AB и n_1 отрицательными окружностями.

Назовемъ модули чиселъ, измѣряющихъ длины: отрицательной геометрической дуги AB и отрицательной окружности, соот-

вѣтственно буквами: β_1 и C. По опредѣленію, число, измѣряющее дугу AB, будетъ таково.

$$-(\beta_1 + n_1 C). \tag{1'}$$

Но $\beta_1 = C - \alpha_1$ [1]); слѣдовательно, число (1') преобразовывается въ такое:

$$\alpha_1 - (n_1 + 1)C = \alpha_1 + nC, \tag{2}$$

гдѣ n есть отрицательное цѣлое число, равное $-(n_1 + 1)$.

Формулы (1) и (2) говорятъ:

Число, измѣряющее дугу AB, выражается формулою:

$$\alpha = \alpha_1 + nC, \tag{38}$$

гдѣ α_1 есть положительное число, измѣряющее соотвѣтственную геометрическую дугу, и гдѣ n есть цѣлое число: положительное, если дуга AB положительная; отрицательное, если дуга AB отрицательная; равное нулю, если дуга AB положительная геометрическая дуга.

Замѣтимъ, что вмѣсто числа α_1 можно взять число α_2, измѣряющее *какую ни есть* изъ дугъ, имѣющихъ начало въ точкѣ A и конецъ въ точкѣ B.

И въ самомъ дѣлѣ, число α_2 имѣетъ, по доказанному, форму [**38**], т.-е. форму:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + pC,$$

гдѣ p есть нѣкоторое цѣлое.

Внося въ выраженіе для α, вмѣсто α_1, равное ему число $(\alpha_2 - pC)$, дадимъ числу α слѣдующій видъ:

$$\alpha = \alpha_2 + (n - p)C;$$

видъ этотъ имѣетъ форму, одинаковую съ формою [**38**], но только α_1 замѣнилось α_2 и цѣлое число n цѣлымъ числомъ $(n - p)$.

Обратно, *если числа β и α, измѣряющія двѣ дуги, связаны соотношеніемъ:*

$$\beta = \alpha + qC,$$

гдѣ q цѣлое число, то дуги эти, будучи отнесены къ одному и тому же началу, имѣютъ одинъ и тотъ же конецъ.

И въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ разность:

$$\alpha - p_1 C.$$

---

[1]) Ибо сумма длинъ двухъ геометрическихъ дугъ AB равна длинѣ окружности.

Можно найти такое цѣлое значеніе для p_1, при которомъ эта разность представитъ *положительное* число α_1, *меньшее* C. Итакъ, при нѣкоторомъ цѣломъ p_1 будемъ имѣть:

$$\alpha = p_1 C + \alpha_1, \quad \text{гдѣ} \quad 0 \leqslant \alpha_1 < C,$$

откуда:

$$\alpha = \alpha_1 + p_1 C \quad \text{и, слѣдовательно,} \quad \beta = \alpha_1 + (p_1 + q) C.$$

Равенства эти и доказываютъ предложеніе.

И въ самомъ дѣлѣ:

1°. Если числа α и β суть числа положительныя, то и дуги, ими измѣряемыя, суть дуги положительныя, причемъ каждая изъ нихъ образована одною и тою же положительною геометрическою дугою, измѣряемою числомъ α_1, и нѣсколькими окружностями; слѣдовательно, обѣ онѣ, *будучи отнесены къ одному и тому же началу, имѣютъ одинъ и тотъ же конецъ,* **что и требовалось доказать.**

2°. Если числа α и β суть числа отрицательныя, то и дуги, ими измѣряемыя, суть дуги отрицательныя. Представивъ числа α и β въ видѣ:

$$\alpha = -(C - \alpha_1) + (p_1 + 1)C, \quad \beta = -(C - \alpha_1) + (p_1 + q + 1)C,$$

увидимъ, что каждая изъ дугъ образована одною и тою же отрицательною геометрическою дугою, абсолютное значеніе которой измѣряется числомъ $C - \alpha_1$, и нѣсколькими отрицательными окружностями; слѣдовательно, обѣ онѣ, *будучи отнесены къ одному и тому же началу, имѣютъ одинъ и тотъ же конецъ,* **что и требовалось доказать.**

3°. Если одно изъ чиселъ: α и β, напр. α, есть число положительное, а другое—отрицательное, то дуга, измѣряемая числомъ α, есть положительная дуга, образованная геометрическою дугою, измѣряемою числомъ α_1, и нѣсколькими окружностями; дуга же, измѣряемая числомъ β, есть отрицательная дуга, образованная отрицательною геометрическою дугою, абсолютное значеніе которой измѣряется числомъ $C - \alpha_1$, и нѣсколькими отрицательными окружностями; но геометрическія дуги: положительная, измѣряемая числомъ α_1, и отрицательная, абсолютное значеніе которой измѣряется числомъ $C - \alpha_1$, имѣютъ, при одномъ и томъ же началѣ, одинъ и тотъ же конецъ; слѣдовательно, разсматриваемыя дуги, *будучи отнесены къ одному и тому же началу, имѣютъ одинъ и тотъ же конецъ,* **что и требовалось доказать.**

309. Равныя дуги. — *Положительныя (отрицательныя) дуги называются равными, если онѣ образованы равными положительными (отрицательными) геометрическими дугами и одинаковымъ числомъ положительныхъ (отрицательныхъ) окружностей.*

Отсюда слѣдуетъ:

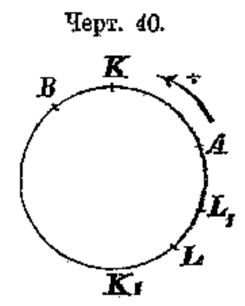
1°. Числа, измѣряющія равныя дуги, при одной и той же единицѣ мѣры, равны.

2°. Равныя дуги имѣютъ, при одномъ и томъ же началѣ, одинъ и тотъ же конецъ.

310. Сумма дугъ. — *Суммою двухъ дугъ, измѣряемыхъ, при одной и той же единицѣ мѣры, числами* α и β, *называется дуга, измѣряемая числомъ* $\alpha+\beta$.

Пусть начало и конецъ дуги, измѣряемой числомъ α, суть точки A и B, и начало и конецъ дуги, измѣряемой числомъ β, суть точки K и L (черт. 40).

Черт. 40.



Назовемъ числа, измѣряющія положительныя геометрическія дуги: AB и KL, соотвѣтственно буквами: α_1 и β_1. Имѣли (**308**):

$$\alpha=\alpha_1+pC, \qquad \beta=\beta_1+qC,$$

гдѣ C есть число, измѣряющее окружность, и p и q суть нѣкоторыя цѣлыя числа. Отсюда:

$$\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1)+(p+q)C.$$

Равенство это показываетъ (**308**), что дуги, измѣряемыя числами: $(\alpha+\beta)$ и $(\alpha_1+\beta_1)$ имѣютъ, *при одномъ и томъ же началѣ*, одинъ и тотъ же конецъ. Но очевидно, что число $(\alpha_1+\beta_1)$ измѣряетъ дугу, равную *суммѣ положительныхъ геометрическихъ дугъ:* AB и KL; конецъ этой дуги, если за ея начало возьмемъ точку A, опредѣлится такимъ образомъ: отъ точки B откладываемъ положительную геометрическую дугу BL_1, равную дугѣ KL; точка L_1 и есть конецъ этой дуги. *Эта точка будетъ*, слѣдовательно, *концомъ*

дуги, равной суммѣ данныхъ дугъ, если за начало этой дуги возьмемъ начало дуги AB.

311. Разность дугъ.—*Разностью двухъ дугъ, измѣряемыхъ, при одной и той же единицѣ мѣры, числами* α и β, *называется дуга, равная суммѣ дугъ, измѣряемыхъ числами* α и $-\beta$, *т.-е. дуга, измѣряемая числомъ* $\alpha-\beta$.

Сохранивъ обозначенія предыдущаго n^0, получимъ:

$$\alpha-\beta=\alpha_1-\beta_1+(p-q)C,$$

или

$$\alpha-\beta=[\alpha_1+(C-\beta_1)]+(p-q-1)C.$$

Разсужденія, подобныя разсужденіямъ предыдущаго n^0, покажутъ, что конецъ дуги, измѣряемой числомъ $(\alpha-\beta)$, если за ея начало возьмемъ точку A, опредѣлится такъ: отъ точки B откладываемъ геометрическую дугу, равную дугѣ, измѣряемой числомъ $C-\beta_1$, т.-е. равную геометрической положительной дугѣ, имѣющей началомъ точку L и концомъ точку K. Конецъ K этой дуги и представитъ искомый конецъ.

§ II. Нѣкоторыя теоремы о дугахъ, имѣющихъ общее начало.

312. Теорема I.—**1°.** *Если* **разность** *двухъ дугъ, имѣющихъ общее начало, равна* **цѣлому** *числу* **окружностей**, *то концы этихъ дугъ совпадаютъ*.

2°. Обратно, *если концы двухъ дугъ, имѣющихъ общее начало, совпадаютъ, то* **разность** *этихъ дугъ равна* **цѣлому** *числу* **окружностей.**

1°. Обозначивъ числа, измѣряющія данныя дуги, буквами α и β, по условію получимъ:

$$\alpha-\beta=kC, \quad \text{гдѣ } k \text{ цѣлое число;}$$

откуда, принимая во вниманіе, что $\alpha=\alpha_1+pC$, найдемъ:

$$\beta=\alpha-kC=\alpha_1+(p-k)C.$$

Видимъ, что дуги α и β имѣютъ одинъ и тотъ конецъ, одинаковый съ концомъ дуги α_1.

2°. Обратно, положимъ, что концы M и M_1 данныхъ дугъ, имѣющихъ общее начало A, совпадаютъ. Геометрическія положительныя дуги AM и AM_1 связаны соотношеніемъ:

$$AM=AM_1;$$

слѣдовательно,

$$\alpha = AM + pC, \qquad \beta = AM + qC;$$

откуда:

$$\alpha - \beta = (p - q)C = kC, \quad \text{гдѣ } k \text{ цѣлое,}$$

что и требовалось доказать.

313. Теорема 2. 1°. *Если* **сумма** *двухъ дугъ, имѣющихъ общее начало, равна* **цѣлому** *числу* **окружностей,** *то концы этихъ дугъ расположены* **симметрично** *относительно діаметра, проходящаго черезъ общее начало этихъ дугъ.*

2°. **Обратно,** *если концы двухъ дугъ, имѣющихъ общее начало, расположены* **симметрично** *относительно діаметра, проходящаго черезъ это начало, то* **сумма** *этихъ дугъ равна* **цѣлому** *числу* **окружностей.**

1°. Сохранивъ предыдущія обозначенія, по условію получимъ:

$$\alpha + \beta = kC, \quad \text{гдѣ } k \text{ цѣлое число;}$$

откуда:

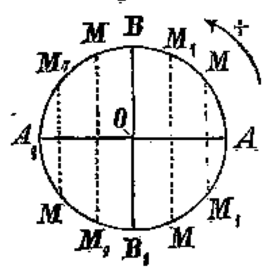
$$\beta = -\alpha + kC,$$

и, слѣдовательно,

$$\beta = -\alpha_1 - pC + kC = (C - \alpha_1) + (k - p - 1)C.$$

Концы дугъ α и β совпадаютъ, при одномъ и томъ же началѣ, соотвѣтственно съ концами *геометрическихъ* дугъ: α_1 и $(C - \alpha_1)$. Но ясно, что сіи послѣдніе концы расположены симметрично относительно діаметра, проходящаго черезъ начало.

Черт. 41.



2°. **Обратно,** положимъ, что концы M и M_1 данныхъ дугъ, имѣющихъ общее начало A, расположены симметрично относительно діаметра AA_1, проходящаго черезъ начало A (черт. 41). Геометрическія положительныя дуги AM и AM_1 связаны соотношеніемъ:

$$AM_1 = C - AM;$$

слѣдовательно,

$$\alpha = AM + pC, \qquad \beta = (C - AM) + qC,$$

откуда:

$$\alpha + \beta = (p + q + 1)C = kC,$$

что и требовалось доказать.

314. Противоположныя дуги.—Двѣ дуги, сумма коихъ равна нулю, называются *противоположными*. Если эти дуги имѣютъ общее начало, то для нихъ имѣетъ мѣсто предыдущая теорема.

315. Теорема 3.—1°. *Если* **сумма** *двухъ дугъ, имѣющихъ общее начало, равна* **нечетному** *числу* **полуокружностей**, *то концы этихъ дугъ расположены* **симметрично** *относительно діаметра, перпендикулярнаго къ діаметру, проходящему черезъ общее начало этихъ дугъ.*

2°. Обратно, *если концы двухъ дугъ, имѣющихъ общее начало, расположены* **симметрично** *относительно діаметра, перпендикулярнаго къ діаметру, проходящему черезъ это начало, то* **сумма** *этихъ дугъ равна* **нечетному** *числу* **полуокружностей.**

1°. Сохранивъ предыдущія обозначенія, по условію получимъ:

$$\alpha + \beta = (2k + 1)\frac{C}{2} = kC + \frac{C}{2}, \quad \text{гдѣ } k \text{ цѣлое;}$$

откуда:

$$\beta = kC + \frac{C}{2} - \alpha,$$

и, слѣдовательно,

$$\beta = kC + \frac{C}{2} - \alpha_1 - pC = \frac{C}{2} - \alpha_1 - (p - k)C$$

Формула эта можетъ быть представлена въ двухъ видахъ:

$$\beta = \left(\frac{C}{2} - \alpha_1\right) - (p - k)C, \quad \text{для } \alpha_1 \leqq \frac{C}{2},$$

и

$$\beta = \left[(C - \alpha_1) + \frac{C}{2}\right] - (p - k + 1)C, \quad \text{для } \alpha_1 > \frac{C}{2},$$

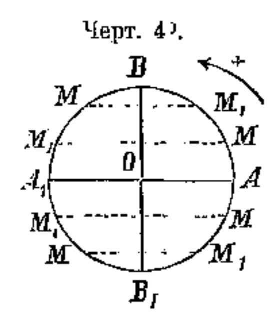
гдѣ дуга $\left(\frac{C}{2} - \alpha_1\right)$ въ первомъ случаѣ и дуга $\left[(C - \alpha_1) + \frac{C}{2}\right]$ во второмъ—суть положительныя геометрическія дуги.

Концы разсматриваемыхъ дугъ α и β совпадаютъ, при одномъ и томъ же началѣ, соотвѣтственно съ концами геометрическихъ дугъ: α_1 и $\left(\frac{C}{2} - \alpha_1\right)$, гдѣ $\alpha_1 \leqq \frac{C}{2}$, и съ концами геометрическихъ дугъ: α_1 и $\left[(C - \alpha_1) + \frac{C}{2}\right]$, гдѣ $\alpha_1 > \frac{C}{2}$.

Но ясно, что конецъ одной изъ дугъ $\left(\frac{C}{2}-\alpha_1\right)$ и $\left[(C-\alpha_1)+\frac{C}{2}\right]$, той и другой, и конецъ дуги α_1 расположены, при одномъ и томъ же началѣ, симметрично относительно діаметра, перпендикулярнаго къ діаметру, проходящему черезъ общее начало.

2° **Обратно**, положимъ, что концы M и M_1 данныхъ дугъ, имѣющихъ общее начало A, расположены симметрично относительно діаметра BB_1, перпендикулярнаго къ діаметру AA_1, проходящему черезъ это начало (черт. 42).

Черт. 42.



Геометрическія положительныя дуги AM и AM_1 связаны соотношеніемъ:

$$AM_1=\frac{C}{2}-AM,\quad \text{для } AM<\frac{C}{2},$$

и

$$AM_1=(C-AM)+\frac{C}{2},\quad \text{для } AM\geqslant\frac{C}{2}.$$

Слѣдовательно, соотвѣтственно,

$$\alpha=AM+pC,\qquad \beta=\left(\frac{C}{2}-AM\right)+qC,$$

и

$$\alpha=AM+pC,\qquad \beta=(C-AM)+\frac{C}{2}+qC;$$

откуда, соотвѣтственно,

$$\alpha+\beta=(p+q)C+\frac{C}{2}=(2p+2q+1)\frac{C}{2}=(2k+1)\frac{C}{2},$$

и

$$\alpha+\beta=(p+q+1)C+\frac{C}{2}=(2p+2q+2+1)\frac{C}{2}=(2k+1)\frac{C}{2},$$

что и требовалось доказать.

316. Пополнительныя дуги.—Двѣ дуги, сумма коихъ равна полуокружности, называются *пополнительными*. Если эти дуги имѣютъ общее начало, то для нихъ имѣетъ мѣсто предыдущая теорема.

317. Теорема 4.—1°. *Если* **разность** *двухъ дугъ, имѣющихъ общее начало, равна* **нечетному** *числу* **полуокружностей,** *то концы этихъ дугъ* **діаметрально** *противоположны.*

2°. **Обратно,** *если концы двухъ дугъ, имѣющихъ общее начало,* **діаметрально** *противоположны, то* **разность** *этихъ дугъ равна* **нечетному** *числу полуокружностей.*

1°. Сохранивъ предыдущія обозначенія, по условію получимъ:

$$\alpha-\beta=(2k+1)\frac{C}{2}=kC+\frac{C}{2},\quad \text{гдѣ } q \text{ цѣлое;}$$

откуда:

$$\beta=\alpha-\frac{C}{2}-kC,$$

и, слѣдовательно,

$$\beta=\alpha_1+pC-\frac{C}{2}-kC=\alpha_1-\frac{C}{2}+(p-k)C.$$

Формула эта можетъ быть представлена въ двухъ видахъ:

$$\beta=\left(\alpha_1-\frac{C}{2}\right)+(p-k)C,\quad \text{для } \alpha_1 \geqq \frac{C}{2},$$

и

$$\beta=\left(\alpha_1+\frac{C}{2}\right)+(p-k-1)C,\quad \text{для } \alpha_1<\frac{C}{2},$$

гдѣ дуга $\left(\alpha_1-\frac{C}{2}\right)$ въ первомъ случаѣ и дуга $\left(\alpha_1+\frac{C}{2}\right)$ во второмъ—суть положительныя геометрическія дуги.

Концы разсматриваемыхъ дугъ: α и β совпадаютъ, при одномъ и томъ же началѣ, соотвѣтственно съ концами геометрическихъ дугъ: α_1 и $\alpha_1-\frac{C}{2}$ въ первомъ случаѣ и съ концами геометрическихъ дугъ: α_1 и $\alpha_1+\frac{C}{2}$ во второмъ. Но ясно, что конецъ одной изъ дугъ: $\left(\alpha_1-\frac{C}{2}\right)$ и $\left(\alpha_1+\frac{C}{2}\right)$, той и другой, и конецъ дуги α_1, при одномъ и томъ же началѣ, діаметрально противоположны.

2°. **Обратно,** положимъ, что концы M и M_1 данныхъ дугъ, имѣющихъ общее начало A, діаметрально противоположны, т.-е. суть концы одного и того же діаметра MM_1 (черт. 43).

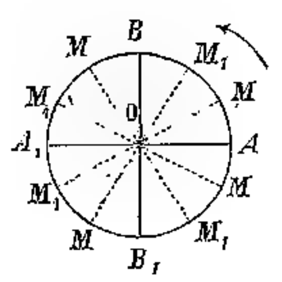
Геометрическія положительныя дуги AM и AM_1 связаны соотношеніемъ:

$$AM_1 = AM - \frac{C}{2}, \quad \text{для } AM \geqslant \frac{C}{2},$$

и

$$AM_1 = AM + \frac{C}{2}, \quad \text{для } AM \leqslant \frac{C}{2}.$$

Черт. 43.



Слѣдовательно, соотвѣтственно,

$$\alpha = AM + pC, \qquad \beta = AM - \frac{C}{2} + qC,$$

и

$$\alpha = AM + pC, \qquad \beta = AM + \frac{C}{2} + qC;$$

откуда, соотвѣтственно,

$$\alpha - \beta = (p-q)C + \frac{C}{2} = (2p-2q+1)\frac{C}{2} = (2k+1)\frac{C}{2},$$

и

$$\alpha - \beta = (p-q)C - \frac{C}{2} = (2p-2q-1)\frac{C}{2} = (2k+1)\frac{C}{2},$$

что и требовалось доказать.

318. Теорема 5.—1°. *Если* **сумма** *двухъ дугъ, имѣющихъ общее начало, равна* **нечетному** *числу* $(2q+1)$ **квадрантовъ**, *то концы этихъ дугъ расположены* **симметрично** *относительно биссектрисы перваго и третьяго квадрантовъ, если q четное, и относительно биссектрисы второго и четвертаго квадрантовъ, если q нечетное.*

2°. Обратно, *сумма двухъ дугъ, имѣющихъ общее начало, равна* **нечетному** *числу* $(2q+1)$ **квадрантовъ**, *гдѣ q четное или нечетное, смотря по тому, расположены ли концы этихъ дугъ* **симметрично** *относительно биссектрисы перваго и третьяго квадрантовъ или второго и четвертаго квадрантовъ.*

1°. Сохранивъ предыдущія обозначенія, по условію получимъ:

$$\alpha + \beta = (2q + 1)\frac{C}{4},$$

гдѣ q цѣлое.

Во-первыхъ, если q *четное* $= 2k$, гдѣ k цѣлое, то

$$\alpha + \beta = kC + \frac{C}{4},$$

откуда:

$$\beta = kC + \frac{C}{4} - \alpha,$$

и, слѣдовательно,

$$\beta = kC + \frac{C}{4} - \alpha_1 - pC = \frac{C}{4} - \alpha_1 + (k - p)C.$$

Формула эта можетъ быть представлена въ двухъ видахъ.

$$\beta = \left(\frac{C}{4} - \alpha_1\right) + (k - p)C, \qquad \text{для } \alpha_1 \leqslant \frac{C}{4},$$

и

$$\beta = \left[(C - \alpha_1) + \frac{C}{4}\right] + (k - p - 1)C, \qquad \text{для } \alpha_1 > \frac{C}{4},$$

гдѣ дуга $\left(\frac{C}{4} - \alpha_1\right)$ въ первомъ случаѣ и дуга $\left[(C - \alpha_1) + \frac{C}{4}\right]$ во второмъ — суть положительныя геометрическія дуги.

Концы разсматриваемыхъ дугъ α и β совпадаютъ, при одномъ и томъ же началѣ, соотвѣтственно съ концами геометрическихъ дугъ: α_1 и $\frac{C}{4} - \alpha_1$ въ первомъ случаѣ и съ концами геометрическихъ дугъ: α_1 и $\left[(C - \alpha_1) + \frac{C}{4}\right]$ во второмъ. Но ясно, что конецъ одной изъ дугъ: $\left(\frac{C}{4} - \alpha_1\right)$ и $\left[(C - \alpha_1) + \frac{C}{4}\right]$, той и другой, и конецъ дуги α_1, при одномъ и томъ же началѣ, расположены симметрично относительно биссектрисы перваго и третьяго квадрантовъ.

Во-вторыхъ, если q *нечетное* $= 2k + 1$, гдѣ k цѣлое, то

$$\alpha + \beta = kC + \frac{3}{4}C,$$

откуда

$$\beta = kC + \frac{3}{4}C - \alpha_1 - pC = \frac{3}{4}C - \alpha_1 + (k - p)C.$$

Формула эта можетъ быть представлена въ двухъ видахъ:

$$\beta=\left(\frac{3}{4}C-\alpha_1\right)+(k-p)C,\quad \text{для } \alpha_1\leqslant\frac{3}{4}C,$$

и

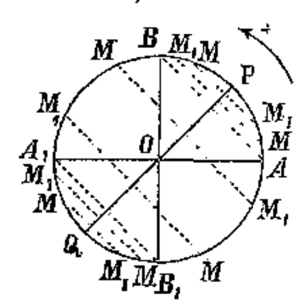
$$\beta=\left[(C-\alpha_1)+\frac{3}{4}C\right]+(k-p-1)C,\quad \text{для } \alpha_1>\frac{3}{4}C,$$

гдѣ дуга $\left(\frac{3}{4}C-\alpha_1\right)$ въ первомъ случаѣ и дуга $\left[(C-\alpha_1)+\frac{3}{4}C\right]$ во второмъ — суть положительныя геометрическія дуги.

Концы разсматриваемыхъ дугъ α и β совпадаютъ, при одномъ и томъ же началѣ, соотвѣтственно съ концами геометрическихъ дугъ: α_1 и $\left(\frac{3}{4}C-\alpha_1\right)$ въ первомъ случаѣ и съ концами геометрическихъ дугъ: α_1 и $\left[(C-\alpha_1)+\frac{3}{4}C\right]$ во второмъ. Но ясно, что конецъ одной изъ дугъ: $\left(\frac{3}{4}C-\alpha_1\right)$ и $\left[(C-\alpha_1)+\frac{3}{4}C\right]$, той и другой, и конецъ дуги α_1, при одномъ и томъ же началѣ, расположены симметрично относительно биссектрисы второго и четвертаго квадрантовъ.

2°. Обратно: Во-первыхъ, положимъ, что концы M и M_1 данныхъ дугъ, имѣющихъ общее начало A, расположены симметрично относительно биссектрисы PQ перваго и третьяго квадрантовъ (черт. 44).

Черт. 44.



Геометрическія положительныя дуги AM и AM_1 связаны соотношеніемъ:

$$AM_1=\frac{C}{4}-AM,\quad \text{для } AM\leqslant\frac{C}{4},$$

и

$$AM_1=(C-AM)+\frac{C}{4},\quad \text{для } AM>\frac{C}{4}.$$

Слѣдовательно, соотвѣтственно,

$$\alpha = AM + pC, \qquad \beta = \left(\frac{C}{4} - AM\right) + qC,$$

и

$$\alpha = AM + pC, \qquad \beta = \left[(C - AM) + \frac{C}{4}\right] + qC;$$

откуда, соотвѣтственно,

$$\alpha + \beta = (p + q + 0)C + \frac{C}{4} = \left[4(p + q + 0) + 1\right]\frac{C}{4} = (4k + 1)\frac{C}{4},$$

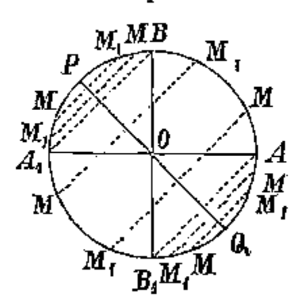
и

$$\alpha + \beta = (p + q + 1)C + \frac{C}{4} = \left[4(p + q + 1) + 1\right]\frac{C}{4} = (4k + 1)\frac{C}{4},$$

что и требовалось доказать.

Во-вторыхъ, положимъ, что концы M и M_1 данныхъ дугъ, имѣющихъ общее начало A, расположены симметрично относительно биссектрисы PQ второго и четвертаго квадрантовъ (черт. 45).

Четр. 45.



Геометрическія положительныя дуги AM и AM_1 связаны соотношеніемъ:

$$AM_1 = \frac{3}{4}C - AM, \qquad \text{для } AM \leqslant \frac{3}{4}C,$$

и

$$AM_1 = (C - AM) + \frac{3}{4}C, \qquad \text{для } AM > \frac{3}{4}C.$$

Слѣдовательно, соотвѣтственно,

$$\alpha = AM + pC, \qquad \beta = \left(\frac{3}{4}C - AM\right) + qC,$$

и

$$\alpha = AM + pC, \qquad \beta = \left[(C - AM) + \frac{3}{4}C\right] + qC;$$

откуда, соотвѣтственно,

$$\alpha+\beta=(p+q+0)C+\frac{3}{4}C=[4(p+q+0)+3]\frac{C}{4}=(4k+3)\frac{C}{4},$$

и

$$\alpha+\beta=(p+q+1)C+\frac{3}{4}C=[4(p+q+1)+3]\frac{C}{4}=(4k+3)\frac{C}{4},$$

что и требовалось доказать.

319. Дополнительныя дуги.—Двѣ дуги, сумма коихъ равна четверти окружности, называются *дополнительными.* Если эти дуги имѣютъ общее начало, то, на основаніи предыдущей теоремы, концы ихъ расположены симметрично относительно биссектрисы перваго и третьяго квадрантовъ.

320. Таблица.—Предыдущія теоремы очень важны. Обозначивъ числа, полученныя отъ измѣренія, произвольною единицею, какой ни есть дуги, имѣющей начало въ точкѣ A и конецъ въ точкѣ M, и какой ни есть дуги, имѣющей начало въ *той же точкѣ* A и конецъ въ точкѣ M_1, соотвѣтственно символами: $\overset{\frown}{AM}$ и $\overset{\frown}{AM_1}$, а число, полученное отъ измѣренія окружности, тою же единицею, буквою C, можетъ выразить предыдущія теоремы слѣдующими равенствами:

1°. **Если** $\overset{\frown}{AM}-\overset{\frown}{AM_1}=kC,$ *то концы* M и M_1 *совпадаютъ*, и **обратно.**

2°. **Если** $\overset{\frown}{AM}+\overset{\frown}{AM_1}=kC,$ *то концы* M и M_1 *расположены симметрично относительно діаметра, проходящаго через начало,* и **обратно.**

3°. **Если** $\overset{\frown}{AM}-\overset{\frown}{AM_1}=(2k+1)\frac{C}{2},$ *то концы* M и M_1 *расположены симметрично относительно центра*, и **обратно.**

4°. **Если** $\overset{\frown}{AM}+\overset{\frown}{AM_1}=(2k+1)\frac{C}{2},$ *то концы* M и M_1 *расположены симметрично относительно діаметра, перпендикулярнаго къ діаметру, проходящему черезъ начало,* и **обратно.**

5°. Если $\widehat{AM}+\widehat{AM_1}=(4k+1)\frac{C}{4}$, *то концы M и M_1 расположены симметрично относительно биссектрисы перваго и третьяго квадрантов,* и **обратно.**

6°. Если $\widehat{AM}+\widehat{AM_1}=(4k+3)\frac{C}{4}$, *то концы M и M_1 расположены симметрично относительно биссектрисы второго и четвертаго квадрантов,* и **обратно**

321. Единицы дугъ.—*Единицами* для измѣренія дугъ могутъ служить единицы, принятыя въ первой части этого курса (**3**, ч. I) для измѣренія положительной геометрической дуги, а именно: *дуга-градусъ, дуга-градъ, дуга-часъ* и *дуга радіанъ.*

322. Тригонометрическая дуга. Тригонометрическою *дугою,* **соотвѣтствующею** *данной дугѣ, называется число, измѣряющее длину дуги посредствомъ дуги-радіана.*

323 Соотношенія между числами, измѣряющими длину одной и той же дуги посредствомъ различныхъ единицъ мѣры.—Видѣли, что число α, измѣряющее длину дуги AB произвольною единицею мѣры, можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\alpha=\alpha_1+nC,$$

гдѣ α_1 есть число, измѣряющее соотвѣтственную положительную геометрическую дугу; C есть число, измѣряющее длину положительной окружности, и n есть цѣлое число, *независящее отъ единицы мѣры.*

Назовемъ числа, измѣряющія соотвѣтственную положительную геометрическую дугу, посредствомъ указанныхъ выше единицъ, соотвѣтственно буквами: a_1, b_1, c_1 и ρ_1, а числа, измѣряющія самую дугу, соотвѣтственно буквами: a, b, c и ρ. Принявъ во вниманіе, что числа, измѣряющія длину окружности, соотвѣтственно суть: 360, 400, 24 и 2π, получимъ:

$$a=a_1+360\,.\,n,\quad b=b_1+400n,\quad c=c_1+24n,\quad \rho=\rho_1+2\pi n.$$

Но (**4**, ч. I)

$$\frac{a_1}{180}=\frac{b_1}{200}=\frac{c_1}{12}=\frac{\rho_1}{\pi};$$

слѣдовательно,

$$\frac{a}{180}=\frac{b}{200}=\frac{c}{12}=\frac{\rho}{\pi},$$

т.-е. *между числами, измѣряющими дугу различными единицами мѣры, существуютъ тѣ же соотношенія, какія имѣютъ мѣсто между числами, измѣряющими, тѣми же единицами мѣры, соотвѣтственную положительную геометрическую дугу.*

Примѣры. — **1°**. Если $a=-6517°$, то $\rho=\pi.-\frac{6517}{180}=$ $=-\frac{6517\pi}{180}$.

2°. Если $\rho=-\frac{612}{5}\pi$, то $a=180°.-\frac{612}{5}=-22032°$.

3°. Если $\rho=3,14$, то $a=180°.\frac{3,14}{\pi}=179°,9\ \ldots$.

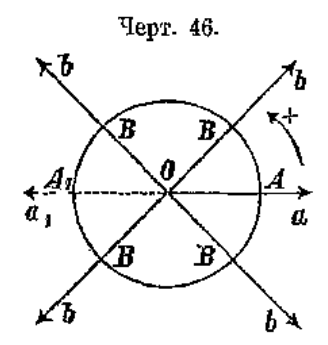
324. Замѣчанія. — **1°**. Если въ формулахъ (**320**) числа: $\widehat{AM}$ и $\widehat{AM_1}$ означаютъ тригонометрическія дуги, то число C равно 2π.

2°. Если въ этихъ формулахъ числа: $\widehat{AM}$ и $\widehat{AM_1}$ суть числа градусовъ, содержащихся въ соотвѣтственныхъ дугахъ, то число C равно 360.

§ III. Углы.

325. Обобщеніе понятія объ углѣ, составляемомъ двумя полупрямыми. — Разсмотримъ двѣ *полупрямыя* Oa и Ob, имѣющія общую точку O. *Угломъ, имѣющимъ* **начальною** *стороною полупрямую* Oa *и конечною стороною полупрямую* Ob, *называется тотъ* **угловой путь**, *который опишетъ вращающаяся въ одну сторону, ту или другую, около точки* O *полупрямая, исходя изъ положенія* Oa *и останавливаясь въ положеніи* Ob (черт. 46).

Черт. 46.



Примѣръ подобнаго движенія имѣемъ въ движеніи минутной и часовой стрѣлки.

Углы, описанные въ сторону, обратную движенію часовой стрѣлки, будемъ называть *положительными*, а въ сторону движенія часовой стрѣлки—*отрицательными*.

Опишемъ изъ точки O *произвольнымъ* радіусомъ окружность и назовемъ точки пересѣченія этой окружности съ полупрямыми Oa и Ob буквами A и B.

Въ то время, какъ вращающаяся прямая будетъ описывать уголъ, точка A будетъ описывать *соотвѣтственную* дугу. Если уголъ таковъ, что соотвѣтственная ему дуга — *геометрическая*, то онъ называется *геометрическимъ* угломъ. Если геометрическая дуга AB, по своей длинѣ, менѣе полуокружности, то введенное сейчасъ понятіе о геометрическомъ углѣ совпадаетъ съ понятіемъ о геометрическомъ углѣ, установленномъ въ геометріи; если же геометрическая дуга AB, по своей длинѣ, болѣе полуокружности, то геометрическій уголъ состоитъ изъ двухъ прямыхъ угловъ и угла A_1OB.

Тотъ уголъ, который опишетъ вращающаяся прямая, выходя изъ положенія Oa и останавливаясь въ положеніи Ob, можетъ состоять или только изъ одного геометрическаго угла, или изъ этого угла и нѣсколькихъ *полныхъ обращеній*, причемъ каждое изъ нихъ будетъ состоять изъ четырехъ прямыхъ угловъ. Указанный геометрическій уголъ называется геометрическимъ угломъ, *соотвѣтственнымъ* описанному углу.

326. Измѣреніе угловъ.— *Числомъ, измѣряющимъ уголъ, называется положительное или отрицательное число, модуль котораго равенъ суммѣ слѣдующихъ чиселъ: числа, измѣряющаго соотвѣтственный геометрическій уголъ, и числа, равнаго числу, которое измѣряетъ прямой уголъ, умноженному на учетверенное число полныхъ обращеній.*

Число это есть число положительное, если измѣряемый уголъ положительный, и отрицательное, если измѣряемый уголъ отрицательный.

Изъ сего опредѣленія вытекаетъ, что *числа, измѣряющія уголъ и соотвѣтственную ему дугу соотвѣтственными угловою и дуговою единицами, равны между собою.*

327. Сумма двухъ угловъ.— *Суммою двухъ угловъ называется уголъ, который соотвѣтствуетъ суммѣ дугъ, отвѣчающихъ слагаемымъ угламъ.*

328. Углы пополнительные и дополнительные. — *Пополнительными* углами называются два угла, сумма коихъ равна двумъ прямымъ угламъ.

Дополнительными углами называются два угла, сумма коихъ равна прямому углу.

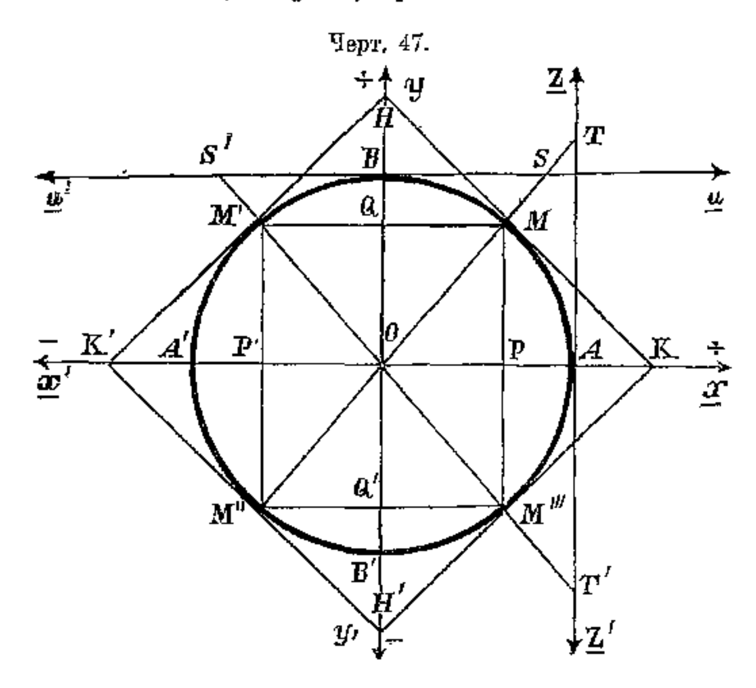
§ IV. Тригонометрическіе элементы дугъ

329. Синусъ и косинусъ дуги.—1°. *Синусомъ дуги называется положительное (отрицательное) число, модуль котораго представляетъ отношеніе, къ радіусу дуги, длины перпендикуляра, опущеннаго изъ конца дуги на діаметръ, проходящій черезъ ея начало. Число это положительное (отрицательное), если конецъ дуги находится въ первомъ или второмъ (третьемъ или четвертомъ) квадрантахъ.*

2°. *Косинусомъ дуги называется положительное (отрицательное) число, модуль котораго представляетъ отношеніе, къ радіусу дуги, длины перпендикуляра, опущеннаго изъ конца дуги на діаметръ, перпендикулярный къ діаметру, проходящему черезъ начало дуги. Число это положительное (отрицательное), если конецъ дуги находится въ первомъ или четвертомъ (второмъ или третьемъ) квадрантахъ.*

Возьмемъ окружность произвольнаго радіуса r (черт. 47) и разсмотримъ дуги, начало коихъ есть точка A, а концы: M, M', M'', M''' находятся въ первомъ, второмъ, третьемъ и четвертомъ квадрантахъ.

Черт. 47.



тахъ. Проведя діаметръ $A'A$ черезъ начало A дугъ и діаметръ $B'B$, къ нему перпендикулярный, опустивъ изъ концовъ: M, M', M'', M''' перпендикуляры: MP, $M'P'$, $M''P'$ и $M'''P$ на діаметръ $A'A$ и перпендикуляры: MQ, $M'Q$, $M''Q'$ и $M'''Q'$ на діаметръ $B'B$ и обозначивъ числа, измѣряющія дуги, имѣющія начало въ точкѣ A,

а концы въ точкахъ: M, M', M'', M''', соотвѣтственно символами: $\widehat{AM}$, $\widehat{AM'}$, $\widehat{AM''}$, $\widehat{AM'''}$, по опредѣленію получимъ:

[39]
$$\left\{\begin{aligned} \sin\widehat{AM} &= \frac{OQ}{r} = \frac{MP}{r}, & \cos\widehat{AM} &= \frac{OP}{r} = \frac{MQ}{r}, \\ \sin\widehat{AM'} &= \frac{OQ}{r} = \frac{M'P'}{r}, & \cos\widehat{AM'} &= -\frac{OP'}{r} = -\frac{M'Q}{r}, \\ \sin\widehat{AM''} &= -\frac{OQ'}{r} = \frac{M''P'}{r}, & \cos\widehat{AM''} &= -\frac{OP'}{r} = -\frac{M''Q'}{r}, \\ \sin\widehat{AM'''} &= -\frac{OQ'}{r} = -\frac{M'''P}{r}, & \cos\widehat{AM'''} &= \frac{OP}{r} = \frac{M'''Q'}{r} \end{aligned}\right.$$ [1]).

330. Синусъ и косинусъ угла. — *Синусомъ и косинусомъ угла называются, соотвѣтственно, синусъ и косинусъ дуги* **произвольнаго радіуса**, *соотвѣтственной этому углу.*

Синусъ и косинусъ угла не зависятъ отъ величины радіуса дуги, ибо, при измѣненіи радіуса, каждое изъ предыдущихъ отношеній сохраняетъ свое значеніе.

Отсюда слѣдуетъ, что синусы и косинусы двухъ дугъ, выражаемыхъ однимъ и тѣмъ же числомъ a, при одноименной, соотвѣтственной каждой дугѣ, единицѣ мѣры, напр. при соотвѣтственныхъ: дугахъ-градусахъ, дугахъ-радіанахъ и т. д., соотвѣтственно равны, ибо дуги эти отвѣчаютъ одному и тому же углу.

331. Важное замѣчаніе. Изъ предъидущихъ опредѣленій вытекаетъ: 1°. *Синусы (косинусы) дугъ, имѣющихъ, при одномъ и томъ же началѣ, одинъ и тотъ же конецъ, равны.* 2°. *Синусы (косинусы) равныхъ дугъ* (**угловъ**), *каково бы не было положеніе ихъ началъ и концовъ, равны.* **3°**. *Данныя въ первой части этого курса* (**25, 26**) *опредѣленія синусовъ и косинусовъ острыхъ, прямыхъ и тупыхъ* **угловъ** *(дугъ, небольшихъ полуокружности), которымъ, слѣдовательно, соотвѣтствуютъ* **тригонометрическіе** *углы (дуги), заключенные въ области* $(-\pi, +\pi)$, *содержатся въ тѣхъ опредѣленіяхъ, которыя даны сейчасъ для синусовъ и косинусовъ какихъ ни есть угловъ (дугъ).*

332. Теорема. — *Значенія тригонометрическихъ функцій:* $\sin x$ *и* $\cos x$, *для всякаго значенія а аргумента* x, *равны, соотвѣтственно,*

---

[1]) Изъ данныхъ опредѣленій синуса и косинуса слѣдуетъ, что синусъ и косинусъ дуги суть, соотвѣтственно, ордината и абсцисса конца дуги, измѣренныя радіусомъ дуги, въ слѣдующей прямоугольной системѣ координатъ: начало координатъ—центръ O окружности; ось x-овъ (абсциссъ)—прямая x_1x, которой принадлежитъ діаметръ $A'A$, проходящій черезъ начало A дуги, причемъ положительное направленіе этой оси есть направленіе отъ центра къ началу дуги; ось y-овъ (ординатъ) — прямая y_1y, которой принадлежитъ діаметръ $B'B$, перпендикулярный къ діаметру $A'A$, причемъ положительное направленіе этой оси есть направленіе отъ центра къ концу B перваго положительнаго квадранта.

синусу и косинусу того угла (дуги), которому отвѣчаетъ тригонометрическій уголъ, равный числу a.

И въ самомъ дѣлѣ:

По даннымъ въ главѣ II (**189**) опредѣленіямъ тригонометрическихъ функцій: синуса и косинуса, для области ($-\pi$, $+\pi$) аргумента, значенія этихъ функцій, для всякаго значенія a аргумента, лежащаго въ этой области, равны, соотвѣтственно, синусу и косинусу того угла, которому соотвѣтствуетъ тригонометрическій уголъ (дуга), равный a. Обозначимъ этотъ уголъ (дугу) символомъ: $\hat{a}(\overset{\frown}{a})$. Итакъ, для всякаго значенія a, заключеннаго въ области ($-\pi$, $+\pi$), имѣемъ:

$$\sin a = \sin\hat{a} = \sin\overset{\frown}{a}, \quad \cos a = \cos\hat{a} = \cos\overset{\frown}{a}, \qquad (1)$$

гдѣ символы: $\sin a$ и $\cos a$ означаютъ значенія тригонометрическихъ функцій: $\sin x$ и $\cos x$ при $x = a$ и гдѣ символы: $\sin\hat{a}$ или $\sin\overset{\frown}{a}$ и $\cos\hat{a}$ или $\cos\overset{\frown}{a}$ означаютъ синусъ и косинусъ того угла (дуги), которому отвѣчаетъ тригонометрическій уголъ (дуга), равный a.

Покажемъ, что равенства (1) имѣютъ мѣсто при всякомъ a.

И въ самомъ дѣлѣ, для всякаго a имѣли (**190**):

$$\sin a = (-1)^l \sin(a - l\pi), \quad \cos a = (-1)^l \cos(a - l\pi), \qquad (2)$$

гдѣ l цѣлое число, ближайшее къ числу $\frac{a}{\pi}$ и небольшее его.

Съ другой стороны, видѣли (**312**):

A. При одномъ началѣ, концы дугъ, которымъ отвѣчаютъ тригонометрическія дуги:

$$\overset{\frown}{a} \text{ и } \overset{\frown}{a - 2k\pi},$$

совпадаютъ, ибо разность этихъ дугъ равна kC (**320, 1°**); слѣдовательно, согласно опредѣленію синуса и косинуса дуги,

$$\sin\overset{\frown}{a} = \sin(\overset{\frown}{a - 2k\pi}), \quad \cos\overset{\frown}{a} = \cos(\overset{\frown}{a - 2k\pi}).$$

B. При одномъ и томъ же началѣ, концы дугъ, которымъ отвѣчаютъ тригонометрическія дуги:

$$\overset{\frown}{a}, \quad \overset{\frown}{a - (2k + 1)\pi},$$

симметричны относительно центра (**320, 3°**) (точки M и M'', точки M' и M''); слѣдовательно, согласно опредѣленію синуса и косинуса дуги,

$$\sin\overset{\frown}{a} = -\sin[\overset{\frown}{a - (2k + 1)\pi}], \quad \cos\overset{\frown}{a} = -\cos[\overset{\frown}{a - (2k + 1)\pi}].$$

Итакъ, какова бы не была дуга $\overset{\frown}{a}$, имѣемъ:

$$\sin\overset{\frown}{a} = (-1)^l \sin(\overset{\frown}{a - l\pi}), \quad \cos\overset{\frown}{a} = (-1)^l \cos(\overset{\frown}{a - l\pi}); \tag{3}$$

но дуга $(\overset{\frown}{a - l\pi})$ есть геометрическая дуга, меньшая полуокружности, а потому, согласно равенствамъ (1),

$$\sin(a - l\pi) = \sin(\overset{\frown}{a - l\pi}), \quad \cos(a - l\pi) = \cos(\overset{\frown}{a - l\pi}).$$

На основанiи сихъ равенствъ равенства (1) и (2) даютъ:

$$\sin a = \sin\overset{\frown}{a}, \quad \cos a = \cos\overset{\frown}{a}, \tag{40}$$

что и требовалось доказать.

333. Тангенсъ и котангенсъ дуги (угла). — **1°**. *Тангенсомъ дуги (угла) называется отношенiе синуса этой дуги къ ея косинусу.*

2°. *Котангенсомъ дуги (угла) называется отношенiе косинуса этой дуги къ ея синусу.*

Итакъ, по опредѣленiю имѣемъ:

$$\operatorname{tang}\overset{\frown}{a} = \frac{\sin\overset{\frown}{a}}{\cos\overset{\frown}{a}}, \quad \operatorname{cotg}\overset{\frown}{a} = \frac{\cos\overset{\frown}{a}}{\sin\overset{\frown}{a}}.$$

Отсюда, принимая во вниманiе равенства [40], получимъ:

$$\operatorname{tang}\overset{\frown}{a} = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tang} a, \quad \operatorname{cotg}\overset{\frown}{a} = \frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{cotg} a. \tag{41}$$

Равенства эти говорятъ, что *тангенсъ (котангенсъ) дуги (угла) есть тангенсъ (котангенсъ) числа, равнаго соотвѣтственной тригонометрической дугѣ (углу).*

334. Геометрическое значенiе тангенса и котангенса дуги. — На основанiи опредѣленiй тангенса и котангенса покажемъ, что:

1°. *Тангенсъ дуги есть положительное или отрицательное число, модуль котораго представляетъ отношенiе, къ радiусу дуги, отрѣзка касательной, проведенной къ дугѣ, черезъ ея начало, заключеннаго между этимъ началомъ и точкою пересѣченiя съ дiаметромъ, проходящимъ черезъ конецъ дуги. Число это положительное, если конецъ дуги лежитъ въ первомъ или третьемъ квадрантахъ, и отрицательное, если этотъ конецъ лежитъ во второмъ или четвертомъ квадрантахъ* [1].

2°. *Котангенсъ дуги есть положительное или отрицательное число, модуль котораго представляетъ отношенiе, къ радiусу дуги,*

[1]) Слѣдовательно, тангенсъ представляетъ, при указанной системѣ координатъ, измѣренную радiусомъ *ординату* точки пересѣченiя касательной, проведенной къ окружности черезъ начало дуги, съ дiаметромъ, проходящимъ черезъ конецъ дуги.

отрѣзка касательной, проведенной къ окружности въ концѣ перваго квадранта, заключеннаго между этимъ концомъ и точкою пересѣченія съ діаметромъ, проходящимъ черезъ конецъ дуги. Число это положительное, если конецъ дуги лежитъ въ первомъ или третьемъ квадрантахъ, и отрицательное, если этотъ конецъ лежитъ во второмъ или четвертомъ квадрантахъ [1]).

И въ самомъ дѣлѣ:

1°. Проведя черезъ начало A дугъ (черт. 47) касательную zz' и отмѣтивъ точки: T и T' пересѣченія ея съ діаметрами, проходящими черезъ концы: M, M', M'', M''' дугъ, изъ подобія слѣдующихъ паръ треугольниковъ: OAT и OPM, OAT' и OPM', OAT и $OP'M''$, OAT' и OPM''' соотвѣтственно получимъ:

$$AT : OA = MP : OP, \quad AT' : OA = M'P' : OP',$$
$$AT : OA = M''P' : OP', \quad AT' : OA = M'''P : OP.$$

Назвавъ радіусъ OA буквою r, изъ этихъ пропорцій соотвѣтственно будемъ имѣть:

$$\frac{AT}{r} = \frac{MP}{r} : \frac{OP}{r}, \quad -\frac{AT'}{r} = \frac{M'P'}{r} : -\frac{OP'}{r},$$
$$\frac{AT}{r} = -\frac{M''P'}{r} : -\frac{OP'}{r}, \quad -\frac{AT'}{r} = -\frac{M'''P}{r} : \frac{OP}{r}.$$

Принимая во вниманіе равенства [39], найдемъ:

$$\frac{AT}{r} = \frac{\sin \widehat{AM}}{\cos \widehat{AM}} = \operatorname{tg} \widehat{AM}, \quad -\frac{AT'}{r} = \frac{\sin \widehat{AM'}}{\cos \widehat{AM'}} = \operatorname{tg} \widehat{AM'},$$
$$\frac{AT}{r} = \frac{\sin \widehat{AM''}}{\cos \widehat{AM''}} = \operatorname{tg} \widehat{AM''}, \quad -\frac{AT'}{r} = \frac{\sin \widehat{AM'''}}{\cos \widehat{AM'''}} = \operatorname{tg} \widehat{AM'''},$$

что и хотѣли показать.

2°. Проведя черезъ конецъ B положительнаго квадранта касательную uu' и отмѣтивъ точки пересѣченія ея S и S' съ діаметрами, проходящими черезъ концы дугъ: M, M', M'', M''', изъ подобія слѣдующихъ паръ треугольниковъ: OBS и OQM, OBS' и OQM', OBS и $OQ'M''$ и OBS' и $OQ'M'''$ соотвѣтственно получимъ:

$$BS : OB = MQ : OQ, \quad BS' : OB = M'Q : OQ,$$
$$BS : OB = M''Q' : OQ', \quad BS' : OB = M'''Q' : OQ'.$$

---

[1]) Слѣдовательно, котангенсъ представляетъ, при указанной системѣ координатъ, измѣренную радіусомъ *абсциссу* точки пересѣченія касательной, проведенной къ окружности въ концѣ перваго квадранта, съ діаметромъ, проходящимъ черезъ конецъ дуги.

Назвавъ радіусъ OB буквою r, изъ этихъ пропорцій соотвѣтственно найдемъ:

$$\frac{BS}{r} = \frac{MQ}{r} : \frac{OQ}{r}, \qquad -\frac{BS'}{r} = \frac{M'Q}{r} : -\frac{OQ}{r},$$

$$\frac{BS}{r} = -\frac{M''Q}{r} : -\frac{OQ'}{r}, \qquad -\frac{BS'}{r} = -\frac{M'''Q}{r} : \frac{OQ'}{r}.$$

Принимая во вниманіе равенства [**39**], получимъ:

$$\frac{BS}{r} = \frac{\cos\widehat{AM}}{\sin\widehat{AM}} = \operatorname{cotg}\widehat{AM}, \qquad \frac{BS'}{r} = \frac{\cos\widehat{AM'}}{\sin\widehat{AM'}} = \operatorname{cotg}\widehat{AM'},$$

$$\frac{BS}{r} = \frac{\cos\widehat{AM''}}{\sin\widehat{AM''}} = \operatorname{cotg}\widehat{AM''}, \qquad -\frac{BS'}{r} = \frac{\cos\widehat{AM'''}}{\sin\widehat{AM'''}} = \operatorname{cotg}\widehat{AM'''},$$

что и хотѣли показать.

335. Секансъ и косекансъ дуги. **1°.** *Секансомъ дуги называется отношеніе* 1 *къ косинусу этой дуги.*

2°. *Косекансомъ дуги называется отношеніе* 1 *къ синусу этой дуги.*

Итакъ, по опредѣленію имѣемъ:

$$\sec\widehat{a} = \frac{1}{\cos\widehat{a}}, \qquad \operatorname{cosec}\widehat{a} = \frac{1}{\sin\widehat{a}}.$$

Отсюда, принимая во вниманіе равенства [**40**], получаемъ:

$$\sec\widehat{a} = \frac{1}{\cos a} = \sec a, \qquad \operatorname{cosec}\widehat{a} = \frac{1}{\sin a} = \operatorname{cosec} a.$$

Равенства эти говорятъ, что *секансъ (косекансъ) дуги есть секансъ (косекансъ) числа, равнаго соотвѣтственной тригонометрической дугѣ.*

336. Геометрическое значеніе секанса и косеканса дуги.— На основаніи опредѣленій секанса и косеканса покажемъ, что:

1°. *Секансъ дуги есть положительное или отрицательное число, модуль котораго представляетъ отношеніе, къ радіусу дуги, отрѣзка продолженнаго діаметра, проходящаго черезъ начало дуги, который, т.-е. отрѣзокъ, заключенъ между центромъ и точкою пересѣченія съ касательною, проведенною черезъ конецъ дуги. Число это положительное, если конецъ дуги лежитъ въ первомъ или четвертомъ квадрантахъ, и отрицательное, если конецъ дуги лежитъ во второмъ или третьемъ квадрантахъ.*

2°. *Косекансъ дуги есть положительное или отрицательное число, модуль котораго представляетъ отношеніе, къ радіусу дуги, отрѣзка*

продолженнаго діаметра, проходящаго черезъ конецъ перваго квадранта, который, т.-е. отрѣзокъ, заключенъ между центромъ и точкою пересѣченія съ касательною, проведенною черезъ конецъ дуги. Число это есть число положительное, если конецъ дуги лежитъ въ первомъ или второмъ квадрантахъ и отрицательное, если конецъ дуги лежитъ въ третьемъ или четвертомъ квадрантахъ.

1°. И въ самомъ дѣлѣ, построивъ въ концахъ: M, M', M'', M''' дугъ касательныя (черт. 47) и замѣтивъ точки: K и K' ихъ пересѣченій съ продолженнымъ въ обѣ стороны діаметромъ, проходящимъ черезъ начало дугъ, образуемъ четыре прямоугольныхъ треугольника: OMK, $OM'K'$, $OM''K'$ и $OM'''K$, которые соотвѣтственно дадутъ:

$$OK.OP=OM^2,\ OK'.OP'=OM'^2,\ OK'.OP'=OM''^2,\ OK.OP=OM'''^2.$$

Назвавъ радіусъ круга буквою r, изъ этихъ равенствъ получимъ:

$$\frac{OK}{r}.\frac{OP}{r}=1,\qquad -\frac{OK'}{r}.-\frac{OP'}{r}=1,$$
$$-\frac{OK'}{r}.-\frac{OP'}{r}=1,\qquad \frac{OK}{r}.\frac{OP}{r}=1;$$

отсюда, принимая во вниманіе равенства [40], находимъ:

$$\frac{OK}{r}=\frac{1}{\cos\widehat{AM}}=\sec\widehat{AM},\quad -\frac{OK'}{r}=\frac{1}{\cos\widehat{AM'}}=\sec\widehat{AM'},$$
$$-\frac{OK'}{r}=\frac{1}{\cos\widehat{AM''}}=\sec\widehat{AM''},\qquad \frac{OK}{r}=\frac{1}{\cos\widehat{AM'''}}=\sec\widehat{AM'''},$$

что и нужно было показать.

2°. Построивъ касательныя въ концахъ: M, M', M'', M''' дугъ и замѣтивъ точки: H и H' ихъ пересѣченій съ продолженнымъ въ обѣ стороны діаметромъ, проходящимъ черезъ конецъ перваго квадранта, образуемъ четыре прямоугольныхъ треугольника: OMH, $OM'H$, $OM''H'$, $OM'''H'$, которые соотвѣтственно дадутъ:

$$OH.OQ=OM^2,\ OH.OQ=OM'^2,\ OH'.OQ'=OM''^2,\ OH'.OQ'=OM'''^2.$$

Назвавъ радіусъ круга буквою r, изъ этихъ равенствъ получимъ:

$$\frac{OH}{r}.\frac{OQ}{r}=1,\qquad \frac{OH}{r}.\frac{OQ}{r}=1,$$
$$-\frac{OH'}{r}.-\frac{OQ'}{r}=1,\qquad -\frac{OH'}{r}.-\frac{OQ'}{r}=1.$$

Принимая во вниманіе равенства [40], найдемъ:

$$\frac{OH}{r} = \frac{1}{\sin\widehat{AM}} = \operatorname{cosec}\widehat{AM}, \qquad \frac{OH}{r} = \frac{1}{\sin\widehat{AM'}} = \operatorname{cosec}\widehat{AM'},$$

$$-\frac{OH'}{r} = \frac{1}{\sin\widehat{AM''}} = \operatorname{cosec}\widehat{AM''}, \qquad -\frac{OH'}{r} = \frac{1}{\sin\widehat{AM'''}} = \operatorname{cosec}\widehat{AM''},$$

что и хотѣли показать.

337. Тригонометрическія функціи перемѣнной дуги.—Предыдущія опредѣленія показываютъ, что каждой опредѣленной дугѣ отвѣчаетъ одинъ синусъ, одинъ косинусъ и т. д.

На основаніи сего говорятъ, что *синусъ, косинусъ, и т. д.*, перемѣнной *дуги* суть функціи *этой дуги (угла)*, причемъ *синусъ, косинусъ*, и т. д., опредѣленной *дуги (угла) называются* тригонометрическими элементами *этой дуги* (угла).

338. Важное замѣчаніе. -Показавъ въ предыдущихъ *nn*°, что каждый изъ тригонометрическихъ элементовъ дуги совпадаетъ съ одноименнымъ тригонометрическимъ элементомъ числа, равнаго соотвѣтственной тригонометрической дугѣ, можемъ сказать, что всѣ свойства тригонометрическихъ функцій, полученныя въ предъидущихъ главахъ, и всѣ формулы, относящіяся къ тригонометрическимъ функціямъ, имѣютъ мѣсто и для соотвѣтственныхъ тригонометрическихъ элементовъ дуги, причемъ всякое значеніе a аргумента, *входящее подъ знакъ тригонометрической функціи*, можемъ замѣнять числами, измѣряющими, при произвольной единицѣ мѣры, ту дугу, которой соотвѣтствуетъ тригонометрическая дуга a. Итакъ, можемъ писать:

$$\sin a = \sin\left(180^{\circ} \,.\, \frac{a}{\pi}\right) = \sin\left(200^{g} \,.\, \frac{a}{\pi}\right) = \sin\left(12^{h} \,.\, \frac{a}{\pi}\right).$$

Но всѣ эти свойства могутъ быть выведены непосредственно изъ тѣхъ обобщенныхъ опредѣленій дуги и ея тригонометрическихъ элементовъ, которыя даны въ этой главѣ.

Этимъ и займемся въ слѣдующихъ §§.

§ V. Границы измѣняемости тригонометрическихъ элементовъ дуги.

339. Синусъ (косинусъ).—*Всякое число, лежащее въ области* $(-1, +1)$, *есть синусъ (косинусъ) безчисленнаго множества дугъ. Всякое число, нележащее въ области* $(-1, +1)$, *не есть синусъ (косинусъ) дуги.*

Возьмемъ какое-нибудь число a, положительное или отрицательное, *модуль котораго не превышаетъ* 1. *Существуютъ:* такой отрѣзокъ OQ (OP) (черт. 47) и такой отрѣзокъ OQ' (OP') *непревышающіе* радіуса, отношенія которыхъ къ радіусу равны $|a|$. Построивъ въ точкахъ Q и Q' (P и P') перпендикуляры къ діаметру BB' (AA') и продолживъ ихъ до пересѣченія съ окружностью въ точкахъ M, M', M'', M''', докажемъ, что *положительное* a есть синусъ (косинусъ) дугъ $\widehat{AM}$ и $\widehat{AM'}$ ($\widehat{AM}$ и $\widehat{AM'''}$), концы коихъ лежатъ въ первомъ и второмъ квадрантахъ (въ первомъ и четвертомъ квадрантахъ), и *отрицательное* a есть синусъ (косинусъ) дугъ $\widehat{AM''}$ и $\widehat{AM'''}$ ($\widehat{AM'}$ и $\widehat{AM''}$), концы коихъ лежатъ въ третьемъ и четвертомъ квадрантахъ (во второмъ и третьемъ квадрантахъ). И въ самомъ дѣлѣ:

$$(1)\ \begin{cases} \sin\widehat{AM}=\frac{OQ}{r},\ \sin\widehat{AM'}=\frac{OQ'}{r},\ \sin\widehat{AM''}=-\frac{OQ'}{r},\ \sin\widehat{AM'''}=-\frac{OQ}{r}, \\ \cos\widehat{AM}=\frac{OP}{r},\ \cos\widehat{AM'}=-\frac{OP'}{r},\ \cos\widehat{AM''}=-\frac{OP'}{r},\ \cos\widehat{AM'''}=\frac{OP}{r}. \end{cases}$$

Но

$$|a|=\frac{OQ}{r}=\frac{OQ'}{r}\qquad\left(|a|=\frac{OP}{r}=\frac{OP'}{r}\right);$$

слѣдовательно,

при *положительномъ* a:

$$\frac{OQ}{r}=\frac{OQ'}{r}=a\qquad\left(\frac{OP}{r}=\frac{OP'}{r}=a\right),$$

и при *отрицательномъ* a:

$$-\frac{OQ}{r}=-\frac{OQ'}{r}=a\qquad\left(-\frac{OP}{r}=-\frac{OP'}{r}=a\right).$$

Вслѣдствіе сего изъ равенствъ (1) получаемъ:

при *положительномъ* a,

$$a=\sin\widehat{AM}=\sin\widehat{AM'}\qquad\left(a=\cos\widehat{AM}=\cos\widehat{AM'''}\right),$$

и при *отрицательномъ* a,

$$a=\sin\widehat{AM''}=\sin\widehat{AM'''}\qquad\left(a=\cos\widehat{AM'}=\cos\widehat{AM''}\right),$$

а это и хотѣли показать.

Если модуль числа a превышаетъ 1, то число это не есть синусъ (косинусъ) дуги, ибо для всякой дуги отрѣзки OQ и OQ' (OP и OP'), не превышаютъ радіуса; слѣдовательно, отношенія этихъ отрѣзковъ къ радіусу не превышаютъ 1.

340. Тангенсъ (котангенсъ). — *Всякое число есть тангенсъ (котангенсъ) безчисленнаго множества дугъ.* Возьмемъ какое ни есть число a, положительное или отрицательное. *Существуютъ:* такой отрѣзокъ AT (BS) и такой отрѣзокъ AT' (BS'), отношенія которыхъ къ радіусу равны $|a|$. Проведя изъ точекъ T и T' (S и S') сѣкущія черезъ центръ O и назвавъ точки пересѣченія этихъ сѣкущихъ съ окружностью буквами: M, M', M'', M''', докажемъ, что *положительное* a есть тангенсъ (котангенсъ) дугъ AM и AM'', концы коихъ лежатъ въ первомъ и третьемъ квадрантахъ, и *отрицательное* a есть тангенсъ (котангенсъ) дугъ AM', AM''', концы коихъ лежатъ во второмъ и четвертомъ квадрантахъ. И въ самомъ дѣлѣ:

$$(2)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\widehat{AM}=\dfrac{AT}{r}, \quad \operatorname{tg}\widehat{AM'}=-\dfrac{AT'}{r}, \quad \operatorname{tg}\widehat{AM''}=\dfrac{AT}{r}, \quad \operatorname{tg}\widehat{AM'''}=-\dfrac{AT'}{r}, \\ \operatorname{cotg}\widehat{AM}=\dfrac{BS}{r}, \operatorname{cotg}\widehat{AM'}=-\dfrac{BS'}{r}, \operatorname{cotg}\widehat{AM''}=\dfrac{BS}{r}, \operatorname{cotg}\widehat{AM'''}=-\dfrac{BS'}{r}. \end{cases}$$

Но

$$|a|=\frac{AT}{r}=\frac{AT'}{r} \qquad \left(|a|=\frac{BS}{r}=\frac{BS'}{r}\right);$$

слѣдовательно,

при *положительномъ* a:

$$\frac{AT}{r}=\frac{AT'}{r}=a \qquad \left(\frac{BS}{r}=\frac{BS'}{r}=a\right),$$

и при *отрицательномъ* a:

$$-\frac{AT}{r}=-\frac{AT'}{r}=a \qquad \left(-\frac{BS}{r}=-\frac{BS'}{r}=a\right).$$

Вслѣдствіе сего изъ равенствъ (2) получаемъ:

при *положительномъ* a,

$$a=\operatorname{tg}\widehat{AM}=\operatorname{tg}\widehat{AM''} \qquad \left(a=\operatorname{cotg}\widehat{AM}=\operatorname{cotg}\widehat{AM''}\right),$$

и при *отрицательномъ* a,

$$a=\operatorname{tg}\widehat{AM'}=\operatorname{tg}\widehat{AM'''}, \qquad \left(a=\operatorname{cotg}\widehat{AM'}=\operatorname{cotg}\widehat{AM'''}\right),$$

а это и хотѣли показать.

341. Секансъ (косекансъ). — *Всякое число, положительное или отрицательное, модуль котораго равенъ* 1 *или болье* 1, *есть секансъ (косекансъ) безчисленнаго множества дугъ.*

Всякое число, положительное или отрицательное, модуль котораго менье 1, *не есть секансъ (косекансъ) дуги.*

Возьмемъ какое нибудь число a, положительное или отрицательное, модуль котораго или равенъ 1 или болѣе 1.

Существуютъ: такой отрѣзокъ OK (OH) и такой отрѣзокъ OK' (OH'), равные радіусу или превышающіе радіусъ, отношенія которыхъ къ радіусу равны $|a|$. Построивъ черезъ точки K и K' (H и H') касательныя къ окружности и отмѣтивъ точки касанія: M, M', M'', M''', докажемъ, что *положительное* a есть секансъ (косекансъ) дугъ $\widehat{AM}$ и $\widehat{AM'''}$ $\left(\widehat{AM} \text{ и } \widehat{AM'}\right)$, концы коихъ лежатъ въ первомъ и четвертомъ (въ первомъ и второмъ) квадрантахъ, и *отрицательное* a есть секансъ (косекансъ) дугъ $\widehat{AM'}$ и $\widehat{AM''}$ ($\widehat{AM''}$ и $\widehat{AM'''}$), концы коихъ лежатъ во второмъ и третьемъ (третьемъ и четвертомъ) квадрантахъ. И въ самомъ дѣлѣ:

$$(3)\begin{cases} \sec\widehat{AM}=\dfrac{OK}{r}, \quad \sec\widehat{AM'}=-\dfrac{OK'}{r}, \quad \sec\widehat{AM''}=-\dfrac{OK'}{r}, \quad \sec\widehat{AM'''}=\dfrac{OK}{r}, \\ \operatorname{cosec}\widehat{AM}=\dfrac{OH}{r}, \operatorname{cosec}\widehat{AM'}=\dfrac{OH}{r}, \operatorname{cosec}\widehat{AM''}=-\dfrac{OH'}{r}, \operatorname{cosec}\widehat{AM'''}=-\dfrac{OH'}{r}. \end{cases}$$

Но

$$a=\frac{OK}{r}=\frac{OK'}{r} \qquad \left(|a|=\frac{OH}{r}=\frac{OH'}{r}\right);$$

слѣдовательно,

при *положительномъ* a:

$$\frac{OK}{r}=\frac{OK'}{r}=a \qquad \left(\frac{OH}{r}=\frac{OH'}{r}=a\right),$$

и при *отрицательномъ* a:

$$-\frac{OK}{r}=-\frac{OK'}{r}=a, \qquad \left(-\frac{OP}{r}=-\frac{OP'}{r}=a\right).$$

Вслѣдствіе сего изъ равенствъ (3) получаемъ:

при *положительномъ* a,

$$a=\sec\widehat{AM}=\sec\widehat{AM'''} \qquad \left(a=\operatorname{cosec}\widehat{AM}=\operatorname{cosec}\widehat{AM'}\right),$$

и при *отрицательномъ* a,

$$a = \sec \widehat{AM'} = \sec \widehat{AM''} \qquad \left(a = \operatorname{cosec} \widehat{AM''} = \operatorname{cosec} \widehat{AM'''}\right),$$

что и хотѣли показать.

Если модуль числа a менье **1**, то число это не есть секансъ (косекансъ) дуги, ибо для всякой дуги отрѣзки OK и OK' (OH и OH') не менѣе радіуса; слѣдовательно, отношенія ихъ къ радіусу не менѣе 1.

§ VI. Теоремы, относящіяся къ замѣненію дуги.

342. Теорема 1.—*Если* **разность** *двухъ дугъ равна* **кратному окружности** *или, что то же,* **четному кратному** *полуокружности, то одноименные тригонометрическіе элементы этихъ дугъ равны*[1]). Видѣли (**312**), что концы дугъ, удовлетворяющихъ условію теоремы, при одномъ и томъ же началѣ, совпадаютъ; слѣдовательно, синусы и косинусы этихъ дугъ соотвѣтственно равны. Теорема доказана.

Если тригонометрическая дуга, соотвѣтствующая одной изъ данныхъ дугъ есть x, то тригонометрическая дуга, соотвѣтствующая другой дугѣ, равна, по условію, числу $x+2k\pi$, и теорема даетъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$\left.\begin{array}{lll} \sin(x+2k\pi)=\sin x, & \cos(x+2k\pi)=\cos x, & \operatorname{tg}(x+2k\pi)=\operatorname{tg}x, \\ \operatorname{cosec}(x+2k\pi)=\operatorname{cosec}x, & \sec(x+2k\pi)=\sec x, & \operatorname{cotg}(x+2k\pi)=\operatorname{cotg}x. \end{array}\right\} \quad [1]^{2)}$$

Если дуги измѣрены градусами и число x есть число градусовъ, то число 2π должно быть замѣнено числомъ 360.

343. Періодичность тригонометрическихъ функцій дуги.— Равенства [1] выражаютъ свойство тригонометрическихъ элементовъ дуги, называемое **періодичностью** и заключающееся въ слѣдующемъ:

Отъ прибавленія, къ какой ни есть дугѣ, дуги, равной произвольному кратному окружности, каждый изъ ея тригонометрическихъ элементовъ не измѣняетъ своего значенія. Дуга 2π (360^0) называется **періодомъ** тригонометрическихъ элементовъ.

---

[1]) Достаточно доказать эту теорему для синуса и косинуса, ибо если $\sin a=\sin b$, $\cos a=\cos b$, то $\operatorname{tg} a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\sin b}{\cos b}=\operatorname{tg} b$, $\operatorname{cotg} a=\frac{\cos a}{\sin a}=\frac{\cos b}{\sin b}=$ $=\operatorname{cotg} b$, $\sec a=\frac{1}{\cos a}=\frac{1}{\cos b}=\sec b$, $\operatorname{cosec} a=\frac{1}{\sin a}=\frac{1}{\sin b}=\operatorname{cosec} b$.

[2]) См. *nn*° **190**, **196**. Тамъ равенства [1] представляли опредѣленія тригонометрическихъ функцій аргумента.

Покажемъ:

1°. *Тригонометрическіе элементы*: sin, cos, sec, cosec *не обладаютъ положительнымъ періодомъ, меньшимъ числа* 2π (360^0), *и отрицательнымъ періодомъ, модуль котораго былъ бы менѣе числа* 2π (360^0) [1].

И въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ *произвольную* дугу x и положимъ, что a есть такая *постоянная* дуга, при которой:

$$\sin(x+a)=\sin x, \quad \operatorname{cosec}(x+a)=\operatorname{cosec} x.$$

Равенства эти требуютъ, чтобы концы дугъ: $x+a$ и x, при одномъ началѣ, или лежали въ одной точкѣ, или совпадали съ концами параллели къ діаметру AA'; въ первомъ случаѣ, какъ видѣли (**312, 2°**), разность этихъ дугъ есть кратное окружности, т.-е.

$$(x+a)-x=a=2k\pi \qquad (360^0 \cdot k),$$

гдѣ k нѣкоторое цѣлое число; во второмъ случаѣ, какъ видѣли (**315, 2°**), сумма дугъ есть нечетное кратное полуокружности, т.-е.

$$(x+a)+x=(2k+1)\pi, \quad \text{откуда} \quad a=(2k+1)\pi-2x.$$

Это выраженіе для a не есть періодъ, ибо оно, для различныхъ x, различно. Но первое выраженіе для a, равное $2k\pi$, независимое отъ x, есть *періодъ*.

Итакъ, *для того, чтобы дуга a была періодомъ синуса и косеканса, достаточно и необходимо, чтобы она имѣла форму*: $2k\pi$ $(360^0 \cdot k)$, *гдѣ k произвольное цѣлое. Наименьшая изъ положительныхъ дугъ, заключенныхъ въ формулѣ*: $2k\pi$, *есть дуга* 2π (360^0); *наименьшая, по модулю, изъ отрицательныхъ дугъ, заключенныхъ въ формулѣ*: $2k\pi$, *есть дуга* -2π (-360^0). А это и хотѣли показать.

Положимъ, что

$$\cos(x+a)=\cos x, \quad \sec(x+a)=\sec x.$$

Равенства эти требуютъ, чтобы концы дугъ: $x+a$ и x, при одномъ началѣ, или лежали въ одной точкѣ, или совпадали съ концами параллели къ діаметру BB'; въ первомъ случаѣ разность этихъ дугъ есть кратное окружности, т.-е.

$$(x+a)-x=a=2k\pi,$$

---

[1]) См. n^0 **268** (стр. 274).

гдѣ k нѣкоторое цѣлое число; во второмъ случаѣ, какъ видѣли (**313, 2⁰**), сумма дугъ есть кратное окружности, т.-е.

$$(x+a)+x=2k\pi, \quad \text{откуда} \quad a=2k\pi-2x.$$

Это выраженіе для a не есть періодъ, ибо оно, для различныхъ x, различно. Но первое выраженіе для a, равное $2k\pi$, независимое отъ x, есть *періодъ*.

Итакъ, *для того, чтобы дуга a была періодомъ косинуса и секанса, достаточно и необходимо, чтобы она имѣла форму:* $2k\pi$, *гдѣ* k *произвольное цѣлое. Наименьшая изъ положительныхъ дугъ, заключенныхъ въ формулѣ:* $2k\pi$, *есть дуга* 2π (360^0); *наименьшая, по модулю, изъ отрицательныхъ дугъ, заключенныхъ въ формулѣ:* $2k\pi$, *есть дуга* -2π (-360^0), что и хотѣли показать.

2⁰. *Тригонометрическіе элементы:* tg *и* cotg *обладаютъ періодами:* π (180^0) *и* $-\pi$ (-180^0) *и не обладаютъ меньшими, по модулю, періодами.*

И въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ двѣ дуги: x и $x+k.\pi$, гдѣ k произвольное цѣлое. Такъ какъ разность этихъ дугъ, равная $k\pi$, есть или четное число полуокружностей, т.-е. кратное окружностей, или нечетное число полуокружностей, то концы этихъ дугъ, при одномъ началѣ, или совпадаютъ (**312, 1⁰**) или симметричны относительно центра (**317, 1⁰**).

И въ томъ и въ другомъ случаяхъ тангенсы и котангенсы этихъ дугъ, соотвѣтственно, равны между собою, т.-е.

$$\operatorname{tang} x=\operatorname{tang}(x+k.\pi), \quad \operatorname{cotg} x=\operatorname{cotg}(x+k.\pi).$$

Равенства эти говорятъ, что число $k.\pi$ есть періодъ элементовъ: tg и cotg. Наименьшія, по модулю, изъ чиселъ, заключенныхъ въ формулѣ $k.\pi$, суть π и $-\pi$.

Обратно, положимъ, что постоянная дуга a такова, что

$$\operatorname{tang} x=\operatorname{tang}(x+a), \quad \operatorname{cotg} x=\operatorname{cotg}(x+a).$$

Равенства эти требуютъ, чтобы концы дугъ: x и $x+a$, при одномъ началѣ, или лежали въ одной и той же точкѣ, или были расположены симметрично относительно центра; въ первомъ случаѣ, какъ видѣли (**312, 2⁰**), разность этихъ дугъ есть кратное окружности, т.-е.

$$(x+a)-x=a=p.2\pi=2p.\pi,$$

гдѣ p нѣкоторое цѣлое; во второмъ случаѣ, какъ видѣли (**317, 2⁰**), разность дугъ есть нечетное кратное полуокружности, т.-е.

$$(x+a)-x=a=(2p+1)\pi.$$

Итакъ, *для того, чтобы дуга a была періодомъ тангенса и котангенса, достаточно и необходимо, чтобы она имѣла форму: $k.\pi$, гдѣ k произвольное цѣлое. Наименьшая изъ положительныхъ дугъ, заключенныхъ въ формулѣ: $k.\pi$, есть дуга π (180^0) и наименьшая, по модулю, изъ отрицательныхъ дугъ, заключенныхъ въ формулѣ: $k\pi$, есть дуга $-\pi$* (-180^0). Это и хотѣли показать.

344. Теорема 2. — *Если* **разность** *двухъ дугъ равна* **нечетному кратному** *полуокружности, то* **тангенсы** *и* **котангенсы** *этихъ дугъ, соотвѣтственно, равны. Другіе тригонометрическіе элементы этихъ дугъ, соотвѣтственно, равны только по модулю, но противоположны по знаку.*

Для доказательства теоремы достаточно показать ея справедливость для синуса и косинуса [1]).

Видѣли (**320**, **3**⁰), что концы дугъ, удовлетворяющихъ условію теоремы, расположены симметрично относительно центра, а потому (черт. 47): если конецъ одной изъ дугъ лежитъ въ первомъ квадрантѣ, то конецъ другой лежитъ въ третьемъ, и наоборотъ (точки M и M''), и если конецъ одной изъ дугъ лежитъ во второмъ квадрантѣ, то конецъ другой лежитъ въ четвертомъ, и наоборотъ (точки M' и M'''). Слѣдовательно, знаки синуса и косинуса одной изъ дугъ противоположны, соотвѣтственно, знакамъ синуса и косинуса другой. Но абсолютныя значенія ихъ одинаковы, ибо:

$$MP = M''P', \quad OP = OP' \quad \text{и} \quad M'P' = M'''P, \quad OP' = OP.$$

Теорема доказана.

Если *тригонометрическая* дуга, соотвѣтствующая одной изъ рассматриваемыхъ дугъ, есть x, то тригонометрическая дуга, соотвѣтствующая другой дугѣ, есть, по условію, $m\pi + x$, гдѣ m цѣлое *нечетное* число, и теорема даетъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$[7] \left\{ \begin{array}{c} \sin(m\pi + x) = (-1)^m \sin x, \quad \cos(m\pi + x) = (-1)^m \cos x, \\ \operatorname{tg}(m\pi + x) = \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}(m\pi + x) = (-1)^m \operatorname{cosec} x, \ \sec(m\pi + x) = (-1)^m \sec x, \\ \operatorname{cotg}(m\pi + x) = \operatorname{cotg} x. \end{array} \right.$$

Равенства эти справедливы, на основаніи свойства періодичности, и для *четнаго* m. Итакъ, написанныя равенства справедливы при всякомъ *цѣломъ* m [2]).

---

[1]) И въ самомъ дѣлѣ, если, для двухъ дугъ a и b, $\sin a = -\sin b$; $\cos a = -\cos b$, то $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sin b}{\cos b} = \operatorname{tg} b$, и т. д.

[2]) См. формулы [7'] (стр. 228).

Если дуги измѣрены градусами и число x есть число градусовъ, то число π должно быть замѣнено числомъ 180 [1]).

345. Теорема 3.—*Если* **сумма** *двухъ дугъ равна* **четному кратному** *полуокружности, то* **косинусы** *и* **секансы** *этихъ дугъ, соотвѣтственно, равны. Другіе тригонометрическіе элементы этихъ дугъ, соотвѣтственно, равны только по модулю, но противоположны по знаку.*

Достаточно доказать эту теорему для синуса и косинуса [2]).

Видѣли (**320**, **2°**), что концы дугъ, удовлетворяющихъ условію теоремы, расположены въ концахъ хорды, параллельной діаметру BB', а потому если конецъ одной изъ дугъ лежитъ въ первомъ квадрантѣ, то конецъ другой лежитъ въ четвертомъ, и наоборотъ (точки M и M'''), и если конецъ одной изъ дугъ лежитъ во второмъ квадрантѣ, то конецъ другой лежитъ въ третьемъ, и наоборотъ (точки M' и M''). Слѣдовательно, синусы этихъ дугъ имѣютъ противоположные знаки, а косинусы—одинаковые. Но абсолютныя значенія (модули) синусовъ и косинусовъ, соотвѣтственно, равны, ибо

$$MP = M'''P, \quad OP = OP \quad \text{и} \quad M'P' = M''P', \quad OP' = OP'.$$

Теорема доказана.

Если тригонометрическая дуга, соотвѣтствующая одной изъ дугъ, есть x, то тригонометрическая дуга, соотвѣтствующая другой дугѣ, есть, по условію, $m\pi - x$, гдѣ m цѣлое *четное* число, и теорема даетъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$(a)\left\{\begin{array}{lll} \sin(m\pi - x) = -\sin x, & \cos(m\pi - x) = \cos x, & \operatorname{tg}(m\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}(m\pi - x) = -\operatorname{cosec} x, & \sec(m\pi - x) = \sec x, & \operatorname{cotg}(m\pi - x) = -\operatorname{cotg} x. \end{array}\right.$$

Если дуги измѣрены градусами и число x есть число градусовъ, то число π должно быть замѣнено числомъ 180.

346. Теорема 4.—*Если* **сумма** *двухъ дугъ равна* **нечетному кратному** *полуокружности, то* **синусы** *и* **косекансы** *этихъ дугъ, соотвѣтственно, равны. Другіе тригонометрическіе элементы этихъ дугъ, соотвѣтственно, равны только по модулю, но противоположны по знаку.*

---

[1]) См. формулы [7] (стр. 228).

[2]) И въ самомъ дѣлѣ: если, для двухъ дугъ a и b, $\sin a = -\sin b$, $\cos a = \cos b$, то $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{\sin b}{\cos b} = -\operatorname{tg} b$, $\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a} = -\frac{\cos b}{\sin b} = -\operatorname{cotg} b$, $\sec a = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\cos b} = \sec b$, $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} = -\frac{1}{\sin b} = -\operatorname{cosec} b$.

Для доказательства теоремы достаточно показать ея справедливость для синуса и косинуса [1]).

Видѣли (**320, 4°**), что концы дугъ, удовлетворяющихъ условію теоремы, расположены въ концахъ хорды, параллельной діаметру AA', а потому если конецъ одной изъ дугъ лежитъ въ первомъ квадрантѣ, то конецъ другой лежитъ во второмъ, и обратно (точки M и M'), и если конецъ одной изъ дугъ лежитъ въ третьемъ квадрантѣ, то конецъ другой лежитъ въ четвертомъ, и наоборотъ (точки M'' и M'''). Слѣдовательно синусы этихъ дугъ имѣютъ знаки одинаковые, а косинусы — противоположные.

Но абсолютныя значенія этихъ элементовъ, соотвѣтственно, равны, ибо

$$MP = M'P, \quad OP = OP' \quad \text{и} \quad M''P' = M'''P, \quad OP' = OP.$$

Теорема доказана.

Если тригонометрическая дуга, соотвѣтствующая одной изъ разсматриваемыхъ дугъ, есть x, то тригонометрическая дуга, соотвѣтствующая другой дугѣ, есть $m\pi - x$, гдѣ m цѣлое *нечетное* число, и теорема даетъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$(b)\left\{\begin{array}{lll} \sin(m\pi - x) = \sin x, & \cos(m\pi - x) = -\cos x, & \operatorname{tg}(m\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}(m\pi - x) = \operatorname{cosec} x, & \sec(m\pi - x) = -\sec x, & \operatorname{cotg}(m\pi - x) = -\operatorname{cotg} x. \end{array}\right.$$

Если дуги измѣрены градусами и число x есть число градусовъ, то число π должно быть замѣнено числомъ 180.

347. Слѣдствія. — **1°.** Каждая изъ формулъ (a), относящихся къ m четному, и соотвѣтственная ей изъ формулъ (b), относящихся къ m нечетному, могутъ быть замѣнены одною соотвѣтственною формулою изъ формулъ:

$$[\mathbf{8'}]\ ^{2)}\left\{\begin{array}{c} \sin(m\pi - x) = (-1)^{m-1}\sin x, \quad \cos(m\pi - x) = (-1)^m \cos x, \\ \operatorname{tg}(m\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}(m\pi - x) = (-1)^{m-1}\operatorname{cosec} x, \quad \sec(m\pi - x) = (-1)^m \sec x, \\ \operatorname{cotg}(m\pi - x) = -\operatorname{cotg} x, \end{array}\right.$$

гдѣ m *произвольное* цѣлое.

---

[1]) И въ самомъ дѣлѣ: если $\sin a = \sin b$ и $\cos a = -\cos b$, то $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{\sin b}{\cos b} = -\operatorname{tg} b$, $\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a} = -\frac{\cos b}{\sin b} = -\operatorname{cotg} b$, $\sec a = \frac{1}{\cos a} = -\frac{1}{\cos b} = -\sec b$, $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} = \frac{1}{\sin b} = \operatorname{cosec} b$.

[2]) См. формулы [**8'**] (стр. 228).

2°. Полагая въ этихъ формулахъ $m = 1$, получимъ:

$$[8]\,^{1)}\quad \begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x, & \cos(\pi - x) = -\cos x, & \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}(\pi - x) = \operatorname{cosec} x, & \sec(\pi - x) = -\sec x, & \operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg} x. \end{cases}$$

3°. Полагая въ этихъ формулахъ $m = 0$, найдемъ:

$$[6]\,^{2)}\quad \begin{cases} \sin(-x) = -\sin x, & \cos(-x) = \cos x, & \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x, & \sec(-x) = \sec x, & \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x. \end{cases}$$

4°. Полагая въ этихъ формулахъ $m = 2$, получимъ:

$$[8'']\quad \begin{cases} \sin(2\pi - x) = -\sin x, & \cos(2\pi - x) = \cos x, & \operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}(2\pi - x) = -\operatorname{cosec} x, & \sec(2\pi - x) = \sec x, & \operatorname{cotg}(2\pi - x) = -\operatorname{cotg} x \end{cases}$$

348. Теорема 5. — *Если* **сумма** *двухъ дугъ равна* **кратному** *четверти окружности, при* **коэффиціентѣ кратности** $(4m + 1)$, *то тригонометрическіе элементы: синусъ, косинусъ, тангенсъ и т. д. одной изъ дугъ равны, соотвѣтственно, косинусу, синусу, котангенсу и т. д. другой.*

Для доказательства теоремы достаточно показать ея справедливость для синуса и косинуса [3]).

Видѣли (**320, 5°**), что концы дугъ, удовлетворяющихъ условіямъ теоремы, расположены симметрично относительно биссектрисы перваго и третьяго квадрантовъ, а потому: если конецъ одной изъ дугъ лежитъ въ первомъ квадрантѣ, то и конецъ другой дуги лежитъ въ этомъ же квадрантѣ (точки M и M') (черт. 48); если конецъ одной дуги лежитъ во второмъ квадрантѣ, то конецъ другой лежитъ въ четвертомъ квадрантѣ, и наоборотъ (точки M и M'), и, наконецъ, если конецъ одной изъ дугъ лежитъ въ третьемъ квадрантѣ, то и конецъ другой дуги лежитъ въ томъ же квадрантѣ (точки M и M'). Слѣдовательно, знаки синуса и косинуса одной изъ дугъ одинаковы, соотвѣтственно, со знаками косинуса и синуса другой. Но и абсолютныя значенія (модули) этихъ элементовъ, соотвѣтственно,

---

[1]) См. формулы [8] (стр. 228).

[2]) См. формулы [6] (стр. 228).

[3]) И въ самомъ дѣлѣ: если, для двухъ д... $= \cos b$ и $= \sin b$, то $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos b}{\sin b} = \operatorname{cotg} b$, $\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sin b}{\cos b} = \operatorname{tg} b$, $\sec a = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sin b} = \operatorname{cosec} b$, и т. д.

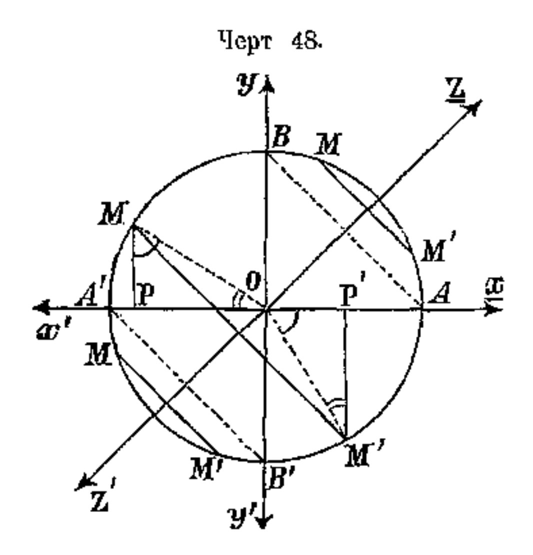
одинаковы, ибо соотвѣтственные прямоугольные треугольники OMP и $OM'P'$ даютъ:

$$MP = OP' \quad \text{и} \quad OP = M'P'.$$

Теорема доказана.

Если тригонометрическая дуга, соотвѣтствующая одной изъ разсматриваемыхъ дугъ, равна x, то тригонометрическая дуга, соот-

Черт 48.



вѣтствующая другой дугѣ, равна $(4m+1)\frac{\pi}{2} - x$, и теорема даетъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$(a) \begin{cases} \sin\left[(4m+1)\frac{\pi}{2} - x\right] = \cos x, \quad \cos\left[(4m+1)\frac{\pi}{2} - x\right] = \sin x, \\ \operatorname{tg}\left[(4m+1)\frac{\pi}{2} - x\right] = \operatorname{cotg} x, \\ \operatorname{cosec}\left[(4m+1)\frac{\pi}{2} - x\right] = \sec x, \quad \sec\left[(4m+1)\frac{\pi}{2} - x\right] = \operatorname{cosec} x, \\ \operatorname{cotg}\left[(4m+1)\frac{\pi}{2} - x\right] = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

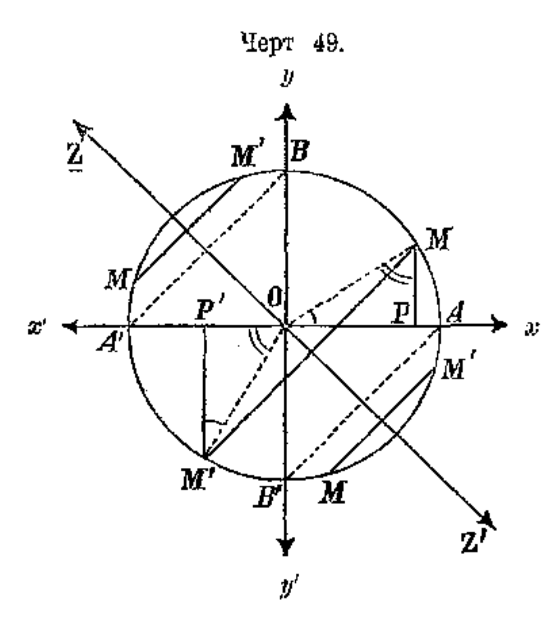
Если дуги измѣрены градусами и число x есть число градусовъ, то число $\frac{\pi}{2}$ должно быть замѣнено числомъ: 90^0.

349. Теорема 6.—*Если* **сумма** *двухъ дугъ равна* **кратному** *четверти окружности, при* **коэффиціентѣ кратности** $(4m+3)$, *то тангенсъ и котангенсъ одной изъ нихъ равны, соотвѣтственно, котангенсу и тангенсу другой; синусъ, косинусъ, секансъ и косекансъ одной равны, соотвѣтственно, косинусу, синусу, косекансу и секансу другой только по модулю, но противоположны по знаку.*

Для доказательства теоремы достаточно показать ея справедливость для синуса и косинуса [1]).

Видѣли (**320**, **6**°), что концы дугъ, удовлетворяющихъ условію теоремы, расположены симметрично относительно биссектрисы второго и четвертаго квадрантовъ (черт. 49), а потому: если конецъ одной дуги лежитъ въ первомъ квадрантѣ, то конецъ другой лежитъ въ третьемъ, и наоборотъ (точки M и M'); если конецъ одной дуги лежитъ во второмъ квадрантѣ, то и конецъ другой дуги лежитъ въ

Черт 49.



томъ же квадрантѣ (точки M и M'), и, наконецъ, если конецъ одной дуги лежитъ въ четвертомъ квадрантѣ, то и конецъ другой дуги лежитъ въ томъ же квадрантѣ (точки M и M'). Слѣдовательно, знаки синуса и косинуса одной изъ дугъ противоположны, соотвѣтственно, знакамъ косинуса и синуса другой. Но абсолютныя значенія этихъ элементовъ, соотвѣтственно, равны, ибо соотвѣтственные прямоугольники OMP и $OM\,P'$ даютъ:

$$MP = OP' \quad \text{и} \quad OP = M'P'.$$

Теорема доказана.

Если тригонометрическая дуга, соотвѣтствующая одной изъ разсматриваемыхъ дугъ, равна числу x, то тригонометрическая

[1]) И въ самомъ дѣлѣ: если $\sin a = \quad \cos b$ и $\cos a = \quad \sin b$, то $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos b}{\sin b} \quad \operatorname{cotg} b$, $\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sin b}{\cos b} = \operatorname{tg} b$, $\sec a = \frac{1}{\cos a} = - \quad \frac{1}{\sin b} \quad -\operatorname{cosec} b$, $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} \quad - \frac{1}{\cos b} = -\sec b$.

дуга, соотвѣтствующая другой дугѣ, равна $(4m+3)\frac{\pi}{2}-x$, и предъидущая теорема даетъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$(2)\begin{cases} \sin\left[(4m+3)\frac{\pi}{2}-x\right]=-\cos x,\ \cos\left[(4m+3)\frac{\pi}{2}-x\right]=-\sin x, \\ \operatorname{tg}\left[(4m+3)\frac{\pi}{2}-x\right]=\operatorname{cotg} x, \\ \operatorname{cosec}\left[(4m+3)\frac{\pi}{2}-x\right]=-\sec x,\ \sec\left[(4m+3)\frac{\pi}{2}-x\right]=-\operatorname{cosec} x, \\ \operatorname{cotg}\left[(4m+3)\frac{\pi}{2}-x\right]=\operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Если дуги измѣрены градусами и число x есть число градусовъ, то число $\frac{\pi}{2}$ замѣняется числомъ 90^0.

350. Слѣдствія. — **1**^{0}. Формулы (1) и (2) могутъ быть замѣнены такими:

$$[9']\,^{1)}\begin{cases} \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=(-1)^k\cos x,\ \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=(-1)^k\sin x, \\ \operatorname{tg}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=\operatorname{cotg} x, \\ \operatorname{cosec}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=(-1)^k\sec x, \\ \sec\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=(-1)^k\operatorname{cosec} x,\ \operatorname{cotg}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=\operatorname{tg} x, \end{cases}$$

гдѣ k произвольное цѣлое, ибо, при $k=2m$, онѣ совпадаютъ съ формулами (1) и, при $k=2m+1$, — съ формулами (2).

2^0. Сдѣлавъ въ этихъ формулахъ $k=0$, получимъ:

$$[9]\,^{2)}\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cotg} x, \\ \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sec x,\ \ \sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cosec} x, \\ \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Формулы эти говорятъ, что *синусъ, косинусъ, и т. д какой ни есть дуги равны, соотвѣтственно, косинусу, синусу и т. д. дополнительной дуги.*

---

1) См. формулы [9'] (стр. 229).

2) См. формулы [9] (стр. 229).

351. Приведеніе дуги къ первому квадранту. — *Привести дугу x къ первому квадранту значитъ найти другую дугу, положительную и меньшую квадранта, каждый изъ тригонометрическихъ элементовъ которой былъ бы равенъ, съ точностью до знака, одноименному тригонометрическому элементу данной дуги.*

Рѣшеніе этой задачи необходимо при вычисленіяхъ посредствомъ таблицъ, которыя содержатъ только тригонометрическіе элементы дугъ (угловъ), заключенныхъ между 0° и 90°.

Задача эта всегда возможна и рѣшается при помощи формулъ [7], которыя, послѣ замѣны m черезъ $(-l)$, могутъ написаться такъ:

$$(7)\ \begin{cases} \sin x=(-1)^l\sin(x-l\pi), & \cos x=(-1)^l\cos(x-l\pi), & \operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(x-l\pi), \\ \operatorname{cosec} x=(-1)^l\operatorname{cosec}(x-l\pi), & \sec x=(-1)^l\sec(x-l\pi), & \operatorname{cotg} x=\operatorname{cotg}(x-l\pi). \end{cases}$$

Формулы эти *приводятъ* тригонометрическіе элементы дуги x къ соотвѣтственнымъ тригонометрическимъ элементамъ дуги $x-l\pi$. Если l есть цѣлое число, ближайшее къ числу $\frac{x}{\pi}$ и не большее его, то дуга $x-l\pi$ заключена между 0 и π, или, въ градусахъ, между 0° и 180°.

Могутъ встрѣтиться два случая:

1°. Дуга $a=x-l\pi$, или, въ градусахъ, $x^0-180^0.l$, заключена между 0 и $\frac{\pi}{2}$, или, въ градусахъ, между 0° и 90°, и тогда задача рѣшена.

2°. Дуга $a=x-l\pi$, или, въ градусахъ, $x^0-180^0.l$, заключена между $\frac{\pi}{2}$ и π, или, въ градусахъ, между 90° и 180°. Въ этомъ случаѣ дуга:

$$b=\pi-(x-l\pi)=\pi-a,\ \text{или, въ градусахъ,}\ 180^0-a,$$

заключена между 0 и $\frac{\pi}{2}$, или, въ градусахъ, между 0° и 90°. При помощи формулъ [8], тригонометрическіе элементы дуги $a=(x-l\pi)$, или, въ градусахъ, $x^0-180^0.l$, приводятся къ одноименнымъ тригонометрическимъ элементамъ дуги $b=\pi-a$, и, слѣдовательно, задача рѣшена.

Замѣтимъ, что если дуга a, въ первомъ случаѣ, и дуга b, во второмъ, заключены между $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$, или, въ градусахъ, между 45° и 90°, то дуги

---

[1]) См. n°n° 197 и 198

$c = \frac{\pi}{2} - a$ и $c = \frac{\pi}{2} - b$, или, въ градусахъ, $90^0 - a^0$ или $90^0 - b^0$, заключены между 0 и $\frac{\pi}{4}$, или, въ градусахъ, между 0^0 и 45^0. При помощи формулъ [2] тригонометрическіе элементы дугъ a и b приводятся къ тригонометрическимъ элементамъ дугъ c.

Дадимъ нѣсколько примѣровъ приведенія, когда дуга выражена въ градусахъ [1]).

1⁰. Если $x^0 = -600^0$, то $\frac{x^0}{180^0} = -3\frac{1}{3}$, $l = -4$ и $a = x^0 - 180^0 . l = 120^0$. Имѣемъ послѣдовательно:

$$\sin(-600^0) = (-1)^4 \sin 120^0 = \sin(180^0 - 60^0) = \sin 60^0 = \cos 30^0.$$

Подобныя же равенства будемъ имѣть и для другихъ элементовъ.

2⁰. Если $x^0 = 1330^0$, то $\frac{x^0}{180^0} = 7\frac{7}{18}$, $l = 7$ и $a = x^0 - 180^0 . l = 60^0$. Имѣемъ послѣдовательно:

$$\sin(1330^0) = (-1)^7 \sin 60^0 = -\cos(90^0 - 60^0) = -\cos 30^0.$$

3⁰. Если $x^0 = -1165^0$, то $\frac{x^0}{180^0} = -6\frac{85}{180}$, $l = -7$ и $a = x^0 - 180^0 . l = 95^0$. Имѣемъ послѣдовательно:

$$\sin(-1165^0) = (-1)^{-7} \sin 95^0 = -\sin(180^0 - 95^0) = -\sin 85^0 = -\cos 5^0.$$

§ VII. Измѣненія значеній тригонометрическихъ элементовъ дуги при непрерывномъ возрастаніи (убываніи) дуги.

352. Общее замѣчаніе относительно измѣненій значеній тригонометрическихъ элементовъ дуги при непрерывномъ возрастаніи (убываніи) дуги. Такъ какъ каждый изъ тригонометрическихъ элементовъ дуги обладаетъ положительнымъ періодомъ, равнымъ числу 2π (360^0), и отрицательнымъ періодомъ, равнымъ числу -2π (-360^0), то, для изслѣдованія измѣненій значеній каждаго изъ тригонометрическихъ элементовъ дуги при непрерывномъ *возрастаніи (убываніи)* дуги, достаточно изслѣдовать эти измѣненія при *возрастаніи* дуги отъ 0 до 2π (отъ 0^0 до 360^0) и при *убываніи* дуги отъ 0 до -2π (отъ 0^0 до -360^0).

---

[1]) Примѣры приведенія, когда дуга выражена въ радіанахъ, были даны въ n⁰n⁰ 197 и 198 (стр. 198).

Далѣе, принявъ во вниманіе равенства [**6**]:

$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \text{tang}(-x) = -\text{tang}\, x, \quad \ldots$

увидимъ, что для изслѣдованія указанныхъ измѣненій при убываніи дуги отъ 0 до -2π, достаточно изслѣдовать эти измѣненія при *возрастаніи* дуги отъ 0 до 2π (отъ 0^0 до 360^0).

Итакъ, *вопросъ приводится къ изслѣдованію измѣненій значеній каждаго изъ тригонометрическихъ элементовъ дуги при* **непрерывномъ возрастаніи** *дуги въ области (промежуткѣ), границы которой суть* 0 *и* 2π (0^0 *и* 360^0).

Разобьемъ область $(0,\ 2\pi)$ или, что то же, область $(0^0,\ 360^0)$ на четыре промежутка:

1-й промежутокъ: отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ (отъ 0^0 до 90^0) (концы дугъ лежатъ въ 1-мъ квадрантѣ);

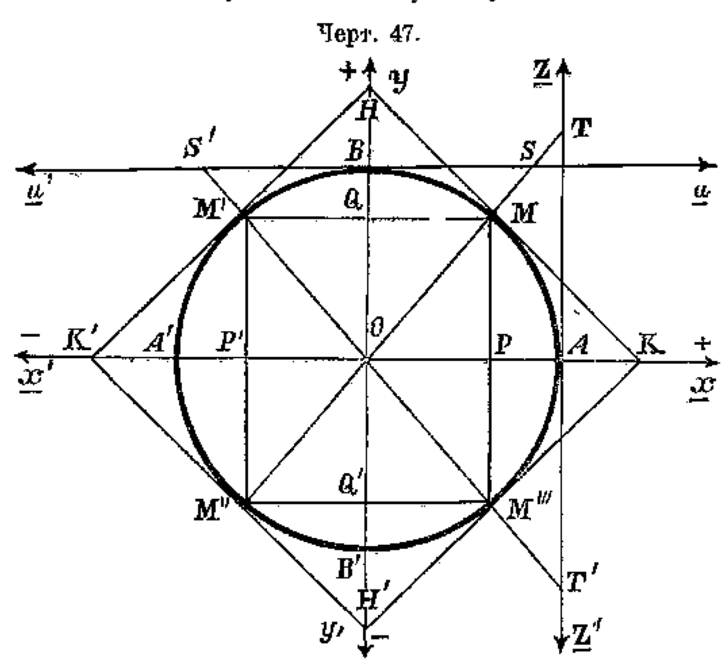
2-й промежутокъ: отъ $\frac{\pi}{2}$ до π (отъ 90^0 до 180^0) (концы дугъ лежатъ во 2-мъ квадрантѣ);

3-й промежутокъ: отъ π до $\frac{3\pi}{2}$ (отъ 180^0 до 270^0) (концы дугъ лежатъ въ 3-мъ квадрантѣ);

4-й промежутокъ: отъ $\frac{3\pi}{2}$ до 2π (отъ 270^0 до 360^0) (концы дугъ лежатъ въ 4-мъ квадрантѣ).

Изслѣдуемъ, обращаясь къ черт. (47), измѣненія значеній каждаго изъ тригонометрическихъ элементовъ при непрерывномъ возрастаніи дуги въ каждомъ изъ указанныхъ промежутковъ.

Черт. 47.



353. Измѣненія значеній тригонометрическихъ элементовъ дуги при ея возрастаніи въ первомъ квадрантѣ. — *При непрерывномъ возрастаніи дуги въ промежуткѣ отъ* 0 *до* $\frac{\pi}{2}$ *(отъ* 0^0 *до* 90^0*)*, т.-е. при непрерывномъ движеніи въ первомъ квадрантѣ точки M, представляющей конецъ дуги, отъ точки A, т.-е. отъ начала квадранта, до точки B, т.-е. до конца квадранта, имѣемъ:

1^0. Перпендикуляръ MP непрерывно возрастаетъ отъ нуля до OB, т.-е. до радіуса r. Слѣдовательно, *синусъ дуги, будучи*, по опредѣленію, *положительнымъ и равнымъ* $\frac{MP}{r}$, **непрерывно** *возрастаетъ отъ* 0 *до* 1, т.-е. *возрастая, принимаетъ* **всѣ** *значенія отъ* **0** *до* **1** (**338**).

2^0. Перпендикуляръ MQ непрерывно убываетъ отъ AO, т.-е. отъ радіуса, до нуля. Слѣдовательно, *косинусъ дуги, будучи*, по опредѣленію, *положительнымъ и равнымъ* $\frac{MQ}{r}$, **непрерывно** *убываетъ отъ* 1 *до* 0, т.-е. *убывая, принимаетъ* **всѣ** *значенія отъ* 1 *до* 0 (**338**).

3^0. Отрѣзокъ AT касательной непрерывно возрастаетъ отъ 0 и, при положеніи точки M, *достаточно* близкомъ къ точкѣ B, становится сколь угодно большимъ, т.-е., другими словами, отрѣзокъ AT *безгранично* возрастаетъ. Слѣдовательно, *тангенсъ дуги, будучи*, по опредѣленію, *положительнымъ и равнымъ* $\frac{AT}{r}$, **непрерывно** *и* **безгранично** *возрастаетъ*, или, какъ говорятъ, **непрерывно** *возрастаетъ отъ* 0 *до положительной безконечности* ($+\infty$), т.-е. *возрастая, принимаетъ* **всѣ** *положительныя значенія* (**339**).

4^0. Отрѣзокъ BS касательной непрерывно убываетъ до 0, представляя, при положеніи точки M, достаточно близкомъ къ точкѣ A, сколь угодно большой отрѣзокъ. Слѣдовательно, *котангенсъ дуги, будучи*, по опредѣленію, *положительнымъ и равнымъ* $\frac{BS}{r}$, **непрерывно** *убываетъ отъ положительной безконечности до нуля*, т.-е. *убывая, принимаетъ* **всѣ** *положительныя значенія* (**339**).

5^0. Отрѣзокъ OK непрерывно возрастаетъ отъ OA, т. е. отъ радіуса, представляя при положеніи точки M, достаточно близкомъ къ точкѣ B, сколь угодно большой отрѣзокъ. Слѣдовательно, *секансъ дуги, будучи*, по опредѣленію, *положительнымъ и равнымъ* $\frac{OK}{r}$, **непрерывно** *возрастаетъ отъ* $+1$ *до* $+\infty$, т.-е. *возрастая, принимаетъ* **всѣ** *значенія, неменьшія* 1 (**340**)

6^0. Отрѣзокъ OH непрерывно убываетъ до OB, т.-е. до радіуса, представляя, при положеніи точки M, достаточно близкомъ къ A, сколь угодно большой отрѣзокъ. Слѣдовательно, *косекансъ*

дуги, будучи, по опредѣленію, *положительнымъ и равнымъ* $\frac{OH}{r}$, непрерывно *убываетъ отъ* $+\infty$ *до* 1, т.-е. *убывая, принимаетъ* всѣ *значенія, неменьшія* 1 (**340**).

354 Измѣненія значеній тригонометрическихъ элементовъ дуги при ея возрастаніи во второмъ квадрантѣ.—*При непрерывномъ возрастаніи дуги въ промежуткѣ отъ* $\frac{\pi}{2}$ *до* π (*отъ* 90° *до* 180°), т.-е. при непрерывномъ движеніи во второмъ квадрантѣ точки M', представляющей конецъ дуги, отъ точки B, т.-е. отъ начала квадранта, до точки A', т.-е. до конца квадранта, имѣемъ:

1°. Перпендикуляръ $M'P'$ непрерывно убываетъ отъ OB, т.-е. отъ радіуса, до нуля. Слѣдовательно, *синусъ дуги, будучи положительнымъ и равнымъ* $\frac{M'P'}{r}$, непрерывно *убываетъ отъ* $+1$ *до* 0.

2°. Перпендикуляръ $M'Q$ непрерывно возрастаетъ отъ 0 до OA', т.-е. до радіуса. Слѣдовательно, *косинусъ дуги, будучи отрицательнымъ и равнымъ* $-\frac{M'Q}{r}$, непрерывно *убываетъ отъ* 0 *до* -1.

3°. Отрѣзокъ AT' касательной непрерывно убываетъ до нуля, представляя, при положеніи точки M', достаточно близкомъ къ B, сколь угодно большой отрѣзокъ. Слѣдовательно, *тангенсъ дуги, будучи отрицательнымъ и равнымъ* $-\frac{AT'}{r}$, непрерывно *возрастаетъ отъ* $-\infty$ *до* 0.

4°. Отрѣзокъ BS' касательной непрерывно возрастаетъ отъ нуля, представляя, при положеніи точки M', достаточно близкомъ къ A', сколь угодно большой отрѣзокъ. Слѣдовательно, *котангенсъ дуги, будучи отрицательнымъ и равнымъ* $-\frac{BS'}{r}$, непрерывно *убываетъ отъ* 0 *до* $-\infty$.

5°. Отрѣзокъ OK' непрерывно убываетъ до OA', т.-е. до радіуса, представляя, при положеніи точки M', достаточно близкомъ къ B, сколь угодно большой отрѣзокъ. Слѣдовательно, *секансъ дуги, будучи отрицательнымъ и равнымъ* $-\frac{OK'}{r}$, непрерывно *возрастаетъ отъ* $-\infty$ *до* -1.

6°. Отрѣзокъ OH непрерывно возрастаетъ отъ OB, т.-е отъ радіуса, будучи, при положеніи точки M', достаточно близкомъ къ A', сколь угодно великъ. Слѣдовательно, *косекансъ дуги, будучи положительнымъ и равнымъ* $\frac{OH}{r}$, непрерывно *возрастаетъ отъ* $+1$ *до* $+\infty$.

355. Измѣненія значеній тригонометрическихъ элементовъ дуги при ея возрастаніи въ третьемъ квадрантѣ. — *При непрерывномъ возрастаніи дуги въ промежуткѣ отъ* π *до* $\frac{3\pi}{2}$ *(отъ* 180^0 *до* 270^0*)*, т.-е. при непрерывномъ движеніи въ третьемъ квадрантѣ точки M'', представляющей конецъ дуги, отъ точки A', т.-е. отъ начала квадранта, до точки B', т.-е. до конца квадранта, имѣемъ:

1⁰. Перпендикуляръ $M'P'$ непрерывно возрастаетъ отъ нуля до OB', т.-е. до радіуса. Слѣдовательно, *синусъ дуги, будучи отрицательнымъ и равнымъ* $-\frac{M''P'}{r}$, непрерывно *убываетъ отъ* 0 *до* -1.

2⁰. Перпендикуляръ $M''Q'$ непрерывно убываетъ отъ OA', т.-е. отъ радіуса, до нуля. Слѣдовательно, *косинусъ дуги, будучи отрицательнымъ и равнымъ* $-\frac{M''Q'}{r}$, непрерывно *возрастаетъ отъ* -1 *до* 0.

3⁰. Отрѣзокъ AT касательной непрерывно возрастаетъ отъ нуля, будучи, при положеніи точки M'', достаточно близкомъ къ B', сколь угодно великъ. Слѣдовательно, *тангенсъ дуги, будучи положительнымъ и равнымъ* $\frac{AT}{r}$, непрерывно *возрастаетъ отъ* 0 *до* $+\infty$.

4⁰. Отрѣзокъ BS касательной непрерывно убываетъ до нуля, причемъ, при положеніи точки M'', достаточно близкомъ къ A', онъ сколь угодно великъ. Слѣдовательно, *котангенсъ дуги, будучи положительнымъ и равнымъ* $\frac{BS}{r}$, непрерывно *убываетъ отъ* $+\infty$ *до* 0.

5⁰. Отрѣзокъ OK' непрерывно возрастаетъ отъ OA', т.-е. отъ радіуса, причемъ, при положеніи точки M'', достаточно близкомъ къ B', онъ сколь угодно великъ. Слѣдовательно, *секансъ дуги, будучи отрицательнымъ и равнымъ* $-\frac{OK'}{r}$, непрерывно *убываетъ отъ* -1 *до* $-\infty$.

6⁰. Отрѣзокъ OH' непрерывно убываетъ до OB', т.-е. до радіуса, причемъ, при положеніи точки M'', достаточно близкомъ къ A', онъ сколь угодно великъ. Слѣдовательно, *косекансъ дуги, будучи отрицательнымъ и равнымъ* $-\frac{OH'}{r}$, непрерывно *возрастаетъ отъ* $-\infty$ *до* -1.

356. Измѣненія значеній тригонометрическихъ элементовъ дуги при ея возрастаніи въ четвертомъ квадрантѣ. — *При непрерывномъ возрастаніи дуги въ промежуткѣ отъ* $\frac{3\pi}{2}$ *до* 2π (отъ 270^0 до 360^0), т.-е. при непрерывномъ движеніи въ четвертомъ квадрантѣ точки M''', представляющей конецъ дуги, отъ точки B',

т.-е. отъ начала квадранта, до точки A, т.-е. до конца квадранта, имѣемъ:

1°. Перпендикуляръ $M'''P$ непрерывно убываетъ отъ OB', т.-е. отъ радіуса, до нуля. Слѣдовательно, *синусъ дуги, будучи отрицательнымъ и равнымъ* $-\frac{M'''P}{r}$, непрерывно *возрастаетъ отъ* -1 *до* 0.

2°. Перпендикуляръ $M'''Q$ непрерывно возрастаетъ отъ нуля до AO, т.-е. до радіуса. Слѣдовательно, *косинусъ дуги, будучи положительнымъ и равнымъ* $\frac{M'''Q'}{r}$, непрерывно *возрастаетъ отъ* 0 *до* $+1$.

3°. Отрѣзокъ касательной AT' непрерывно убываетъ до нуля, причемъ, при положеніи точки M''', достаточно близкомъ къ B', онъ сколь угодно великъ. Слѣдовательно, *тангенсъ дуги, будучи отрицательнымъ и равнымъ* $-\frac{AT'}{r}$, непрерывно *возрастаетъ отъ* $-\infty$ *до* 0.

4°. Отрѣзокъ касательной BS' возрастаетъ отъ нуля, причемъ, при положеніи точки M'', достаточно близкомъ къ A, онъ сколь угодно великъ. Слѣдовательно, *котангенсъ дуги, будучи отрицательнымъ и равнымъ* $-\frac{BS'}{r}$, непрерывно *убываетъ отъ* 0 *до* $-\infty$.

5°. Отрѣзокъ OK непрерывно убываетъ до OA, т. е. до радіуса, причемъ, при положеніи точки M''', достаточно близкомъ къ B, онъ сколь угодно великъ. Слѣдовательно, *секансъ дуги, будучи положительнымъ и равнымъ* $\frac{OK}{r}$, непрерывно *убываетъ отъ* $+\infty$ *до* $+1$.

6°. Отрѣзокъ OH' непрерывно возрастаетъ отъ OB', т.-е. отъ радіуса, причемъ, при положеніи точки M''', достаточно близкомъ къ A, онъ сколь угодно великъ. Слѣдовательно, *косекансъ дуги, будучи отрицательнымъ и равнымъ* $-\frac{OH'}{r}$, непрерывно *убываетъ отъ* -1 *до* $-\infty$.

357. Таблица измѣненій значеній тригонометрическихъ элементовъ дуги при непрерывномъ возрастаніи дуги отъ 0 до 2π (отъ 0° до 360°).—Предыдущія изслѣдованія приводятъ къ таблицѣ, помѣщенной на стр. 277 и полученной теперь инымъ путемъ.

Таблица эта, для области $(0, 2\pi)$, или, что то же, для области $(0°, 360°)$, даетъ.

1°. Тѣ дуги, у которыхъ тотъ или другой изъ тригонометрических элементовъ равенъ нулю, а именно:

$$\sin 0 = \sin 0^0 = 0, \qquad \sin \pi = \sin 180^0 = 0,$$
$$\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} 0^0 = 0, \qquad \operatorname{tg} \pi = \operatorname{tg} 180^0 = 0,$$
$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^0 = 0, \qquad \cos \frac{3\pi}{2} = \cos 270^0 = 0,$$
$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{cotg} 90^0 = 0, \qquad \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{2} = \operatorname{cotg} 270^0 = 0.$$

Секансъ и косекансъ не равны нулю ни при какой дугѣ.

2°. Тѣ дуги, у которыхъ тотъ или другой изъ тригонометрическихъ элементовъ равенъ $\pm\infty$, а именно:

$$\operatorname{tang} \frac{\pi}{2} = \operatorname{tang} 90^0 = \pm\infty, \qquad \operatorname{tang} \frac{3\pi}{2} = \operatorname{tang} 270^0 = \pm\infty,$$
$$\operatorname{cotg} 0 = \operatorname{cotg} 0^0 = \mp\infty, \qquad \operatorname{cotg} \pi = \operatorname{cotg} 180^0 = \mp\infty,$$
$$\sec \frac{\pi}{2} = \sec 90^0 = \pm\infty, \qquad \sec \frac{3\pi}{2} = \sec 270^0 = \mp\infty,$$
$$\operatorname{cosec} 0 = \operatorname{cosec} 0^0 = \mp\infty, \qquad \operatorname{cosec} \pi = \operatorname{cosec} 180^0 = \pm\infty.$$

Синусъ и косинусъ не равны безконечности ни при какой дугѣ.

3°. Границы, между которыми измѣняется каждый изъ тригонометрическихъ элементовъ, а именно:

$$|\sin x| \leqslant 1, \qquad |\cos x| \leqslant 1, \qquad |\operatorname{tg} x| \geqslant 0,$$
$$|\operatorname{cosec} x| \geqslant 1, \qquad |\sec x| \geqslant 1, \qquad |\operatorname{cotg} x| \geqslant 0,$$

гдѣ x есть произвольная дуга.

4°. Тѣ дуги, при которыхъ тотъ или другой изъ тригонометрическихъ элементовъ имѣетъ значеніе — maximum и имѣетъ значеніе — minimum, т.-е. такія значенія, достигнувъ коихъ, при возрастаніи дуги, тригонометрическій элементъ перестаетъ возрастать, чтобы начать убывать, или перестаетъ убывать, чтобы начать возрастать. Дуги эти и самые maximum'ы и minimum'ы суть:

$$\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^0 = 1\,(\mathrm{max}), \qquad \sin \frac{3\pi}{2} = \sin 270^0 = -1\,(\mathrm{min}),$$
$$\cos 0 = \cos 0^0 = 1\,(\mathrm{max}), \qquad \cos \pi = \cos 180^0 = -1\,(\mathrm{min}),$$
$$\sec 0 = \sec 0^0 = 1\,(\mathrm{min}), \qquad \sec \pi = \sec 180^0 = -1\,(\mathrm{max}),$$
$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = \operatorname{cosec} 90^0 = 1\,(\mathrm{min}), \qquad \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} = \operatorname{cosec} 270^0 = -1\,(\mathrm{max}).$$

Тангенсъ и котангенсъ не имѣютъ ни minimum'овъ, ни maximum'овъ, причемъ первый находится въ состояніи возрастанія, при возрастаніи дуги, а второй—въ состояніи убыванія.

ГЛАВА VII.

Обратныя круговыя функціи.

§ I. Обращеніе тригонометрическихъ элементовъ дугъ (угловъ).

358. Выраженіе задачи. — Задача обращенія какого ни есть тригонометрическаго элемента заключается въ слѣдующемъ:

Найти **всѣ** *дуги, тригонометрическій элементъ коихъ, тотъ или другой, равенъ данному числу* [1]).

359. Обращеніе синуса и косеканса. — Дано число y, заключенное въ границахъ измѣняемости синуса (косеканса), т.-е. принадлежащее области: $(-1, +1)$ [одной изъ двухъ областей: $(-\infty, -1)$ и $(+1, +\infty)$]. Видѣли (**338**, **340**), что существуетъ безчисленное множество дугъ, синусы (косекансы) коихъ равны данному числу y.

Требуется найти **всѣ** *дуги, синусы (косекансы) коихъ равнялись бы этому числу.*

Положимъ, что буква α означаетъ какую-нибудь одну изъ нихъ, а буква x — всякую изъ нихъ. Изъ опредѣленія синуса (косеканса) слѣдуетъ, что только тѣ дуги имѣютъ равные синусы (косекансы), концы коихъ, при одномъ и томъ же началѣ, или **1°** совпадаютъ съ концомъ дуги α или **2°** лежатъ въ концѣ хорды, параллельной діаметру AA', другой конецъ которой есть конецъ дуги α, ибо тогда и только тогда синусы (косекансы) всякой изъ дугъ x и дуги α имѣютъ, совмѣстно, одно и то же абсолютное значеніе (модуль) и одинъ и тотъ же знакъ.

Но видѣли, что:

1°. Только тѣ дуги x удовлетворяютъ первому условію (**320**, **1°**), которыя удовлетворяютъ равенству:

$$x - \alpha = kC = 2k \cdot \frac{C}{2}.$$

2°. Только тѣ дуги x удовлетворяютъ второму условію (**320**, **5°**), которыя удовлетворяютъ равенству:

$$x + \alpha = (2k + 1)\frac{C}{2}.$$

---

[1]) См. **269** и **270** (стр. 278)

Итакъ, *только тѣ дуги x имѣютъ синусами (косекансами) данное число y, которыя заключены въ формулахъ*

$$x = \alpha + 2k \cdot \frac{C}{2}, \quad x = \alpha + (2k+1)\frac{C}{2},$$

гдѣ α есть число, измѣряющее одну изъ этихъ дугъ. *C есть число, измѣряющее длину окружности,* и *k произвольное цѣлое.* Формулы эти могутъ быть соединены въ одну:

$$x = (-1)^q \alpha + q \cdot \frac{C}{2},$$

гдѣ q произвольное цѣлое.

Если за единицу мѣры взята дуга-градусъ, то предыдущая формула напишется такъ:

$$x^0 = (-1)^q \alpha^0 + 180^0 \cdot q.$$

Если за единицу мѣры взята дуга-радіанъ, то формула представится въ видѣ:

$$x = (-1)^q \alpha + q\pi. \qquad [21]$$

Положимъ, что *дуга α означаетъ наименьшую, по модулю, дугу, синусъ (косекансъ) которой равенъ данному числу y.* Она лежитъ въ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, если данный синусъ (косекансъ) есть число положительное, и въ области $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$, если данный синусъ (косекансъ) есть число отрицательное.

Дуга эта, измѣренная дугою-радіаномъ, обозначается символомъ:

$$\arcsin y, \qquad (\operatorname{arccosec} y).$$

Итакъ, *символъ:*

$$\arcsin y, \qquad (\operatorname{arccosec} y).$$

означаетъ наименьшую, по модулю, тригонометрическую дугу, синусъ (косекансъ) которой равенъ числу y. Дуга эта лежитъ въ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, если y есть число положительное, и въ области $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$, если y есть число отрицательное.

Замѣтимъ, что въ каждой изъ указанныхъ областей не существуетъ другой дуги, синусъ (косекансъ) которой былъ бы равенъ данному числу y.

Означивъ всякую дугу, имѣющую синусомъ (косекансомъ) данное число y, символомъ:

$$((\arcsin y)), \qquad [((\operatorname{arc\,cosec} y))],$$

на основаніи формулы [21] получимъ:

$$((\arcsin y)) = (-1)^q \arcsin y + q\pi, \quad ((\operatorname{arc\,cosec} y)) = (-1)^q \operatorname{arc\,cosec} y + q\pi.$$

Примѣры.

1°. $\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

2°. $\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4},$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

3°. $\operatorname{arc\,cosec} 1 = +\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arc\,cosec}\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arc\,cosec}\sqrt{2} = \frac{\pi}{4},$

$$\operatorname{arc\,cosec} 2 = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arc\,cosec}(+\infty) = 0$$

4°. $\operatorname{arc\,cosec}(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arc\,cosec}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{3},$

$$\operatorname{arc\,cosec}(-\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arc\,cosec}(-2) = -\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arc\,cosec}(-\infty) = 0.$$

Символъ:

$$\arcsin(\sin x), \qquad [\operatorname{arc\,cosec}(\operatorname{cosec} x)],$$

означаетъ наименьшую, по модулю, тригонометрическую дугу, синусъ (косекансъ) которой равенъ синусу (косекансу) дуги x.

Если x есть наименьшая, по модулю, тригонометрическая дуга, синусъ (косекансъ) которой равенъ $\sin x$ ($\operatorname{cosec} x$), то предыдущій символъ, по его опредѣленію, равенъ x.

Примѣры.

1°. $$\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = -\frac{\pi}{6},$$

2°. $$\operatorname{arc\,cosec}(\operatorname{cosec} 345^\circ) = \operatorname{arc\,cosec}[\operatorname{cosec}(-15^\circ)] = -\frac{\pi}{12}.$$

360. Обращеніе тангенса и котангенса. — Дано число y, заключенное въ какихъ ни есть границахъ. Видѣли (**340**), что

существуетъ безчисленное множество дугъ, тангенсы (котангенсы) коихъ равны данному числу y.

Требуется найти **всѣ** *дуги, тангенсы (котангенсы) коихъ равнялись бы этому числу.*

Положимъ, что буква α означаетъ какую-нибудь одну изъ нихъ и буква x — всякую изъ нихъ.

Изъ опредѣленія тангенса (котангенса) слѣдуетъ, что только тѣ дуги имѣютъ равные тангенсы (котангенсы), концы коихъ, при одномъ и томъ же началѣ, или 1° совпадаютъ съ концомъ дуги α, или 2° лежатъ въ концѣ діаметра, другой конецъ котораго есть конецъ дуги α, ибо тогда и только тогда тангенсы (котангенсы) всякой изъ дугъ x и дуги α имѣютъ, совмѣстно, одно и то же абсолютное значеніе (модуль) и одинъ и тотъ же знакъ.

Но видѣли, что:

1°. Только тѣ дуги x удовлетворяютъ первому условію (**320**, 1°), которыя удовлетворяютъ равенству:

$$x-\alpha=kC=2k\cdot\frac{C}{2}.$$

2°. Только тѣ дуги x удовлетворяютъ второму условію (**320**, **3°**), которыя удовлетворяютъ равенству:

$$x-\alpha=(2k+1)\frac{C}{2}.$$

Итакъ, *только тѣ дуги x имѣютъ тангенсами (котангенсами) данное число y, которыя заключены въ формулахъ:*

$$x=\alpha+2k\cdot\frac{C}{2},\qquad x=\alpha+(2k+1)\frac{C}{2},$$

гдѣ α есть одна изъ этихъ дугъ, C есть число, измѣряющее длину окружности, и k произвольное цѣлое.

Формулы эти могутъ быть соединены въ одну:

$$x=\alpha+q\cdot\frac{C}{2},$$

гдѣ q произвольное цѣлое.

Если за единицу мѣры взята дуга-градусъ, то предыдущая формула напишется такъ:

$$x^0=\alpha^0+180^0\cdot q.$$

Если за единицу мѣры взята дуга-радіанъ, то формула представится въ видѣ:

$$x=\alpha+q\pi. \qquad [22]$$

Положимъ, что *дуга α означаетъ наименьшую, по модулю, дугу, тангенсъ (котангенсъ) которой равенъ данному числу y.*

Дуга эта, измѣренная дугою-радіаномъ, обозначается символомъ:

$$\operatorname{arctg} y, \qquad (\operatorname{arccotg} y).$$

Итакъ, *символъ:*

$$\operatorname{arctg} y, \qquad (\operatorname{arccotg} y),$$

означаетъ наименьшую, по модулю, тригонометрическую дугу, тангенсъ (котангенсъ) которой равенъ числу y. Дуга эта лежитъ въ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, если число y положительное, и въ области $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$, если число y отрицательное.

Замѣтимъ, что въ каждой изъ указанныхъ областей не существуетъ другой дуги, тангенсъ (котангенсъ) которой равенъ данному числу y.

Означивъ всякую дугу, имѣющую тангенсомъ (котангенсомъ) данное число y, символомъ:

$$((\operatorname{arctg} y)), \qquad [((\operatorname{arccotg} y))],$$

на основаніи формулы [**23**] получимъ:

$$((\operatorname{arctg} y)) = \operatorname{arctg} y + k\pi, \quad ((\operatorname{arccotg} y)) = \operatorname{arccotg} y + k\pi.$$

Примѣры.

1°. $\operatorname{arctg} 0 = 0, \ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}, \ \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \ \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$

$$\operatorname{arctg} +\infty = \frac{\pi}{2}.$$

2°. $\operatorname{arctg} 0 = 0, \ \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}, \ \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4},$

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \ \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

3°. $\operatorname{arccotg}(0+\varepsilon) = \frac{\pi}{2} - \omega$ [1], $\operatorname{arccotg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}, \ \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4},$

$$\operatorname{arccotg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \ \operatorname{arccotg}(+\infty) = 0$$

4°. $\operatorname{arccotg}(0-\varepsilon) = -\frac{\pi}{2} + \omega$ [1], $\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{3},$

$$\operatorname{arccotg}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \ \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}, \ \operatorname{arccotg}(-\infty) = 0.$$

---

[1]) При достаточно маломъ положительномъ ε число ω будетъ сколь угодно малое положительное число.

Символъ:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x), \qquad [\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}x)],$$

означаетъ наименьшую, по модулю, тригонометрическую дугу, тангенсъ (котангенсъ) которой равенъ тангенсу (котангенсу) дуги x.

Если x есть наименьшая, по модулю, тригонометрическая дуга, тангенсъ (котангенсъ) которой равенъ $\operatorname{tg}x$ ($\operatorname{cotg}x$), то предыдущій символъ, по его опредѣленію, равенъ x.

Примѣры.

1°. $$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\right)=\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\frac{\pi}{3},$$

2°. $$\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}150^0)=\operatorname{arccotg}[\operatorname{cotg}(-30^0)]=-\frac{\pi}{6}.$$

361. Обращеніе косинуса и секанса.—Дано число y, заключенное въ границахъ измѣняемости косинуса (секанса), т.-е. принадлежащее области: $(-1, +1)$, [одной изъ двухъ областей: $(-\infty, -1)$ и $(+1, +\infty)$].

Видѣли (**339, 341**), что существуетъ безчисленное множество дугъ, косинусы (секансы) коихъ равны данному числу y.

Требуется *найти* всѣ *дуги, косинусы (секансы) коихъ равнялись бы этому числу.*

Положимъ, что буква α означаетъ какую-нибудь одну изъ нихъ, а буква x—всякую изъ нихъ.

Изъ опредѣленія косинуса (секанса) слѣдуетъ, что только тѣ дуги имѣютъ косинусы (секансы), равные косинусу (секансу) дуги α, концы коихъ, при одномъ и томъ же началѣ, или 1° совпадаютъ съ концомъ дуги α, или 2° лежатъ въ концѣ хорды, параллельной діаметру BB', другой конецъ которой есть конецъ дуги α, ибо тогда и только тогда косинусы (секансы) всякой изъ дугъ x и дуги α имѣютъ, совмѣстно, одно и то же абсолютное значеніе (модуль) и одинъ и тотъ же знакъ.

Но видѣли, что:

1°. Только тѣ дуги x удовлетворяютъ первому условію (**320, 1°**), которыя удовлетворяютъ равенству:

$$x-\alpha-kC=2k\cdot\frac{C}{2}.$$

2°. Только тѣ дуги x удовлетворяютъ второму условію (**320, 2°**), которыя удовлетворяютъ равенству:

$$x+\alpha=kC.$$

Итакъ, *только тѣ дуги x имѣютъ косинусами (секансами) данное число y, которыя заключены въ формулахъ:*

$$x = \alpha + kC, \qquad x = -\alpha + kC,$$

гдѣ α есть одна изъ этихъ дугъ, C есть число, измѣряющее длину окружности, и k произвольное цѣлое.

Формулы эти могутъ быть соединены въ одну:

$$x = \pm\alpha + qC,$$

гдѣ q произвольное цѣлое.

Если за единицу мѣры взята дуга-градусъ, то предыдущая формула напишется такъ:

$$x^0 = \pm\alpha^0 + 360^0 \, . \, q.$$

Если за единицу мѣры взята дуга-радіанъ, то формула представится въ видѣ:

$$x = \pm\alpha + 2q\pi. \qquad [23]$$

Положимъ, что *дуга α означаетъ наименьшую положительную дугу, косинусъ (секансъ) которой равенъ данному числу y.* Она лежитъ въ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, если данный косинусъ (секансъ) есть число положительное, и въ области $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, если данный косинусъ (секансъ) есть число отрицательное.

Дуга эта, измѣренная дугою-радіаномъ, обозначается символомъ:

$$\arccos y, \qquad (\operatorname{arcsec} y).$$

Итакъ, *символъ*

$$\arccos y, \qquad (\operatorname{arcsec} y),$$

означаетъ наименьшую положительную дугу, косинусъ (секансъ) которой равенъ числу y. Дуга эта лежитъ въ области $\left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$, если y есть число положительное, и въ области $\left(+\frac{\pi}{2}, +\pi\right)$, если y есть число отрицательное.

Замѣтимъ, что въ каждой изъ указанныхъ областей не существуетъ другой дуги, косинусъ (секансъ) которой былъ бы равенъ данному числу y.

Означивъ всякую дугу, имѣющую косинусомъ (секансомъ) данное число y, символомъ:

$$((\text{arccos}\, y)), \qquad [((\text{arcsec}\, y))],$$

на основаніи формулы [23] получимъ:

$$((\text{arccos}\, y)) = \pm \text{arccos}\, y + 2q\pi, \qquad ((\text{arcsec}\, y)) = \pm \text{arcsec}\, y + 2q\pi.$$

Примѣры

1°. $\text{arccos}\, 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{arccos}\, \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \text{arccos}\, \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{arccos}\, \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},$

$$\text{arccos}\, 1 = 0.$$

2°. $\text{arccos}\, 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4},$

$$\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}, \quad \text{arccos}(-1) = \pi.$$

3°. $\text{arcsec}\, 1 = 0, \quad \text{arcsec}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \text{arcsec}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4},$

$$\text{arcsec}\, 2 = \frac{\pi}{3}, \quad \text{arcsec}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

4°. $\text{arcsec}(-\infty) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{arcsec}(-2) = +\frac{2\pi}{3}, \quad \text{arcsec}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4},$

$$\text{arcsec}(-2) = \frac{2\pi}{3}, \quad \text{arcsec}(-1) = \pi.$$

Символъ:

$$\text{arccos}(\cos x), \qquad [\text{arcsec}(\sec x)],$$

означаетъ наименьшую положительную тригонометрическую дугу, косинусъ (секансъ) которой равенъ косинусу (секансу) дуги x.

Если x есть наименьшая положительная дуга, косинусъ (секансъ) которой равенъ $\cos x$ ($\sec x$), то предыдущій символъ, по его опредѣленію, равенъ x.

Примѣры.

1°. $$\text{arccos}\left(\cos\frac{9\pi}{8}\right) = \text{arccos}\left(\cos\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{7\pi}{8},$$

2°. $$\text{arcsec}(\sec 345^\circ) = \text{arcsec}(\sec 15^\circ) = \frac{\pi}{12}.$$

362. Обратныя круговыя функціи.—Каждый изъ символовъ:

(1) $\quad \text{arcsin}\, x, \ \text{arccos}\, x, \ \text{arctg}\, x, \ \text{arccotg}\, x, \ \text{arcsec}\, x$ и $\text{arccosec}\, x$

представляетъ функцію аргумента x, ибо, по опредѣленію указанныхъ символовъ, данному значенію аргумента отвѣчаетъ одно опредѣ-

ленное значеніе символа [1]). Функціи эти носятъ, соотвѣтственно, названія: **арксинусъ** x, **арккосинусъ** x, **арктангенсъ** x, **арккотангенсъ** x, **арксекансъ** x и **арккосекансъ** x. Области аргумента, для которыхъ каждая изъ этихъ функцій опредѣлена, и области значеній, принимаемыхъ каждою изъ функцій, суть:

$$
(A)\quad \begin{cases}
1^0. & -1 \leqslant x \leqslant +1, & -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant +\frac{\pi}{2}; \\
2^0. & -1 \leqslant x \leqslant +1, & 0 \leqslant \arccos x \leqslant +\pi; \\
3^0. & -\infty \leqslant x \leqslant +\infty, & -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,tg} x \leqslant +\frac{\pi}{2}; \\
4^0. & -\infty \leqslant x \leqslant +\infty, & -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,cotg} x \leqslant +\frac{\pi}{2}; \\
5^0. & x \leqslant -1,\ x \geqslant +1, & 0 \leqslant \operatorname{arc\,sec} x \leqslant +\pi; \\
6^0. & x \leqslant -1,\ x \geqslant +1, & -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,cosec} x \leqslant +\frac{\pi}{2}.
\end{cases}
$$

Если въ тригонометрическихъ функціяхъ:

$$
(2)\qquad \sin x,\quad \cos x,\quad \operatorname{tg} x,\quad \operatorname{cotg} x,\quad \sec x,\quad \operatorname{cosec} x
$$

ограничимъ области аргументовъ, соотвѣтственно, неравенствами:

$$
(B)\quad \begin{cases}
1^0. & -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}, & -1 \leqslant \sin x \leqslant +1; \\
2^0. & 0 \leqslant x \leqslant +\pi, & -1 \leqslant \cos x \leqslant +1; \\
3^0. & -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}, & -\infty \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant +\infty; \\
4^0. & -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}, & -\infty \leqslant \operatorname{cotg} x \leqslant +\infty; \\
5^0. & 0 \leqslant x \leqslant +\pi, & \sec x \leqslant -1,\quad \sec x \geqslant +1; \\
6^0. & -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}, & \operatorname{cosec} x \leqslant -1,\quad \operatorname{cosec} x \geqslant +1,
\end{cases}
$$

то увидимъ:

1°. *Область аргумента каждой изъ функцій* (1) *есть область соотвѣтственной тригонометрической функціи, и наоборотъ.*

Такъ, напр., область аргумента для функціи $\arcsin x$ такова:

$$-1 \leqslant x \leqslant +1;$$

та же область есть область тригонометрической функціи: $\sin x$.

---

[1]) Исключеніе составляетъ функція $\operatorname{arc\,cotg} x$ для $x = 0$, когда она имѣетъ два значенія $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, причемъ $\lim \operatorname{arc\,cotg}(0-\varepsilon) = -\frac{\pi}{2}$ и $\lim \operatorname{arc\,cotg}(0+\varepsilon) = +\frac{\pi}{2}$.

Область аргумента для тригонометрической функціи $\sec x$ такова:

$$0 \leqslant x \leqslant +\pi;$$

та же область есть область функціи $\operatorname{arcsec} x$ и т. д.

2°. *Если для значенія аргумента, равнаго a, значеніе той или другой изъ функцій* (1) *равно b, то значеніе соотвѣтственной тригонометрической функціи, при $x=b$, равно именно a,* **и наоборотъ.**

Такъ: $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, и наоборотъ;

$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, и наоборотъ;

$\operatorname{arccosec}(-\infty) = 0$ и $\operatorname{cosec} 0 = -\infty$, и наоборотъ;

$\operatorname{arccosec}(+\infty) = 0$ и $\operatorname{cosec} 0 = +\infty$, и наоборотъ;

$\operatorname{arccotg} 0 = \pm\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{cotg}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$, и наоборотъ.

3°. *Каждая изъ функцій* (1) *и соотвѣтственная ей тригонометрическая функція суть, совмѣстно, функціи возрастающія или убывающія при возрастаніи аргумента.*

Такъ, напр., функція: $\arcsin x$, при возрастаніи аргумента отъ -1 до $+1$, возрастаетъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$; въ то же время функція $\sin x$, при возрастаніи аргумента отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, возрастаетъ отъ -1 до $+1$. Функція $\arccos x$, при возрастаніи аргумента отъ -1 до $+1$, убываетъ отъ $+\pi$ до 0; въ то же время функція $\cos x$, при возрастаніи аргумента отъ 0 до до $+\pi$, убываетъ отъ $+1$ до -1.

Вслѣдствіе указанныхъ свойствъ каждая изъ функцій (1) называется **обратною** соотвѣтственной тригонометрической функціи, и, наоборотъ, каждая изъ тригонометрическихъ функцій (2) называется **обратною** соотвѣтственной функціи (1).

Функціи (1) носятъ общее названіе **обратныхъ тригонометрическихъ** или **обратныхъ круговыхъ функцій.**

363. Сложныя тригонометрическія функціи. — Положимъ, что въ тригонометрическихъ функціяхъ:

(1) $\sin y,\ \cos y,\ \operatorname{tg} y,\ \operatorname{cotg} y,\ \sec y,\ \operatorname{cosec} y$

аргументъ y представляетъ какую ни есть изъ функцій:

(2) $\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arccotg} x,\ \operatorname{arcsec} x,\ \operatorname{arccosec} x.$

Покажемъ, что каждая изъ функцій (1) есть алгебраическая функція аргумента x.

Остановимся на функціи $\sin y$. Взявъ послѣдовательно для y каждую изъ функцій (2), получимъ:

1°. $\sin(\arcsin x)=x$. И въ самомъ дѣлѣ, если $y=\arcsin x$, то $x=\sin y=\sin(\arcsin x)$.

2°. $\sin(\arccos x)=+\sqrt{1-x^2}$. И въ самомъ дѣлѣ, если $y=$ $=\arccos x$, то $\cos y=x$ и $\sin y=\sin(\arccos x)=+\sqrt{1-x^2}$, причемъ корень долженъ быть взять со знакомъ $+$, ибо $y=\arccos x$ лежитъ, по опредѣленію, въ области $(0, \pi)$, и, слѣдовательно, $\sin y$ есть положительное число.

3°. $\sin(\operatorname{arctg} x)=+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. И въ самомъ дѣлѣ, если $y=$ $=\operatorname{arctg} x$, то $\operatorname{tg} y=x$ и $\sin y=\sin(\operatorname{arctg} x)=+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, причемъ у корня долженъ быть взятъ знакъ $+$, вслѣдствіе того, что $\sin y$ и x совмѣстно положительные и совмѣстно отрицательные, ибо если x есть положительное число, то $\operatorname{arctg} x$ лежитъ въ области $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, и, слѣдовательно, $\sin(\operatorname{arctg} x)$ есть положительное число; если же x есть отрицательное число, то $\operatorname{arctg} x$ лежитъ въ области $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$, и, слѣдовательно, $\sin(\operatorname{arctg} x)$ есть отрицательное число.

4°. $\sin(\operatorname{arccotg} x)=\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$. И въ самомъ дѣлѣ, если $y=$ $=\operatorname{arccotg} x$, то $\operatorname{cotg} y=x$ и $\sin y=\sin(\operatorname{arccotg} x)=+\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$, причемъ у корня долженъ быть взятъ знакъ $+$, ибо $\sin y$ и x совмѣстно положительные и совмѣстно отрицательные.

5°. $\sin(\operatorname{arcsec} x)=+\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$. И въ самомъ дѣлѣ, если $y=$ $=\operatorname{arcsec} x$, то $\sec y=x$ и $\sin y=\sin(\operatorname{arcsec} x)=+\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$, причемъ у корня долженъ быть взятъ знакъ $+$, ибо $y=\operatorname{arcsec} x$ лежитъ, по опредѣленію, въ области $(0, \pi)$, и, слѣдовательно, $\sin y$ есть положительное число.

6°. $\sin(\operatorname{arccosec} x)=\frac{1}{x}$. И въ самомъ дѣлѣ, если $y=\operatorname{arccosec} x$, то $\operatorname{cosec} y=x$ и $\sin y=\sin(\operatorname{arccosec} x)=\frac{1}{x}$.

Итакъ, слѣдовательно, имѣемъ:

$$\sin(\arcsin x)=x, \qquad \sin(\operatorname{arctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \sin(\operatorname{arcsec} x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}},$$

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}, \quad \sin(\operatorname{arccotg} x)=\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\operatorname{arccosec} x)=\frac{1}{x},$$

гдѣ при каждомъ корнѣ долженъ быть взятъ знакъ $+$.

Результаты эти и доказываютъ предложеніе относительно функціи $\sin(\arcsin x)$.

Повторивъ разсужденія относительно каждой изъ функцій (1), придемъ къ слѣдующей таблицѣ, доказывающей предложеніе относительно каждой изъ указанныхъ функцій (см. таблицу на стр. 390).

364. Упражненія. — Предлагаемъ показать, что символы:

$$\sin(2\arcsin x), \quad \sin(2\arccos x), \quad \cos(2\arcsin x), \quad \cos(2\arccos x),$$
$$\sin(2\operatorname{arc\,tg} x), \quad \operatorname{tg}(2\arcsin x), \quad \operatorname{cosec}(2\operatorname{arc\,cosec} x), \text{ и т. п.},$$
$$\sin(3\arcsin x), \quad \sin(3\arccos x), \quad \cos(3\arcsin x), \quad \cos(3\arccos x),$$
$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right), \quad \cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right), \quad \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right), \quad \cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right),$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right), \quad \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\arccos x\right), \quad \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\right), \quad \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arccotg} x\right)$$

представляютъ алгебраическія функціи x, и найти выраженія для этихъ функцій.

365. Функціи: sin (m arc sin x), sin (m arc cos x), cos (m arc sin x), cos (m arc cos x).— Имѣя (283) слѣдующія формулы:

$$\sin(ny)=(n)_1\cos^{n-1}y\sin y-(n)_3\cos^{n-3}y\sin^3 y+(n)_5\cos^{n-5}\sin^5 y-\ldots,$$
$$\cos(ny)=(n)_0\cos^n y \qquad -(n)_2\cos^{n-2}y\sin^2 y+(n)_4\cos^{n-4}\sin^4 y-\ldots,$$

гдѣ n есть произвольное натуральное число.

Положивъ въ нихъ послѣдовательно $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ и принявъ во вниманіе, что

$$\sin(\arcsin x)=x, \quad \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}, \quad \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}, \quad \cos(\arccos x)=x,$$

получимъ:

$$(1)\begin{cases}\sin(n\arcsin x)=(n)_1(\sqrt{1-x^2})^{n-1}x-(n)_3(\sqrt{1-x^2})^{n-3}x^3+(n)_5(\sqrt{1-x^2})^{n-5}x^5-\ldots,\\ \sin(n\arccos x)=(n)_1\sqrt{1-x^2}\,x^{n-1}-(n)_3(\sqrt{1-x^2})^3x^{n-3}+(n)_5(\sqrt{1-x^2})^5x^{n-5}-\ldots,\\ \cos(n\arcsin x)=(n)_0(\sqrt{1-x^2})^n \quad -(n)_2(\sqrt{1-x^2})^{n-2}x^2+(n)_4(\sqrt{1-x^2})^{n-4}x^4-\ldots,\\ \cos(n\arccos x)=(n)_0x^n-(n)_2x^{n-2}(1-x^2)+(n)_4x^{n-4}(1-x^2)^2-\ldots.\end{cases}$$

Равенства эти говорятъ:

1°. *Функція* $\cos(n\arccos x)$, *при всякомъ n—четномъ и нечетномъ, представляетъ цѣлую функцію аргумента x степени n.*

Означимъ эту цѣлую функцію символомъ: $f(x)$ и покажемъ, что

$$\cos[n((\arccos x))]=f(x).$$

y	$\operatorname{arc\,sin} x$	$\operatorname{arc\,cos} x$	$\operatorname{arc\,tg} x$	$\operatorname{arc\,cotg} x$	$\operatorname{arc\,sec} x$	$\operatorname{arc\,cosec} x$
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$	$\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$	$\frac{1}{x}$
cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$
tg	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$	$\frac{1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$
cotg	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$	$x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$
sec	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$
cosec	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$	x

Всѣ корни, входящіе въ эти формулы, суть положительныя числа.

И въ самомъ дѣлѣ, имѣли (361)

$$((\arccos x)) = 2k\pi \pm \arccos x, \quad n((\arccos x)) = 2nk\pi \pm n \arccos x,$$

откуда

$$\cos[n((\arccos x))] = \cos(n \arccos x) = f(x).$$

Равенство это позволяетъ рѣшить уравненіе:

$$f(x) = 0, \tag{2}$$

ибо оно говоритъ, что корни этого уравненія и уравненія:

$$\cos[n((\arccos x))] = 0$$

одинаковы. Но послѣднее уравненіе даетъ (201, Б):

$$n((\arccos x)) = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \text{откуда} \quad ((\arccos x)) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{n},$$

и, слѣдовательно,

$$x = \cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right], \tag{3}$$

гдѣ k произвольное цѣлое. Выраженіе (3) и представляетъ всѣ корни уравненія (2), но только въ тригонометрическомъ видѣ. Оно имѣетъ, какъ легко показать, n различныхъ значеній, которыя получимъ, давая буквѣ k значенія $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Примѣры.—

$$\cos(5 \arccos x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$
$$\cos(6 \arccos x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

Слѣдовательно, корни уравненій:

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0, \quad 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = 0$$

суть, соотвѣтственно, значенія слѣдующихъ выраженій:

$$\cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{5}\right], \qquad \cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{6}\right].$$

Давая буквѣ k въ первомъ выраженіи значенія: 0, 1, 2, 3, 4, 5, а во второмъ значенія: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, получимъ, для корней 1-го уравненія, числа:

$$\pm\cos\frac{\pi}{10}, \qquad \pm\cos\frac{3\pi}{10}, \qquad \cos\frac{5\pi}{10} = 0,$$

а для корней 2-го уравненія числа:

$$\pm\cos\frac{\pi}{12}, \qquad \pm\cos\frac{3\pi}{12}, \qquad \pm\cos\frac{5\pi}{12}.$$

Замѣтимъ, что 1-е уравненіе рѣшается весьма просто алгебраически, ибо одинъ изъ его корней равенъ нулю, а остальные четыре, будучи корнями биквадратнаго уравненія:

$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0,$$

суть

$$x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}.$$

Сопоставляя алгебраическія выраженія корней съ тригонометрическими, найдемъ:

$$\cos\frac{\pi}{10} = \cos 18^0 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad \cos\frac{3\pi}{10} = \cos 54^0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Отсюда легко найдемъ:

$$\sin\frac{\pi}{10} = \sin 18^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \sin\frac{3\pi}{10} = \sin 54^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\sin 36^0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Принимая во вниманіе, что $\sin 18^0$ представляетъ отношеніе, къ радіусу, половины хорды, стягивающей двойную дугу, т.-е. дугу въ 36^0, т.-е. половины хорды, представляющей сторону правильнаго вписаннаго десятиугольника, и обозначивъ эту сторону буквами a_{10}, получимъ:

$$a_{10} = r \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

откуда

$$a_{10} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}.$$

Формула эта, извѣстная изъ геометріи, указываетъ *на способъ построенія, циркулемъ и линейкою, стороны правильно вписаннаго десятиугольника и, слѣдовательно, раздѣленія окружности на десять равныхъ частей.*

Значеніе для $\sin 36^0$ даетъ выраженіе для стороны правильно вписаннаго пятиугольника. Обозначивъ ее буквою a_5, получимъ:

$$a_5 = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

Легко показать, что

$$a_5^2 = a_{10}^2 + r^2,$$

т.-е. *сторона правильно вписаннаго пятиугольника равна гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, катеты котораго равны сторонѣ правильно вписаннаго десятиугольника и радіусу.*

2°. *Функція* $\cos(n \arcsin x)$ *представляетъ, при n четномъ, цѣлую функцію степени n.*

Означимъ эту цѣлую функцію символомъ: $f(x)$ и покажемъ, что

$$\cos[n((\arcsin x))] = f(x).$$

И въ самомъ дѣлѣ, имѣли (**359**):

$$((\arcsin x)) = (-1)^k \arcsin x + k\pi, \quad n((\arcsin x)) = (-1)^k n \arcsin x + nk\pi;$$

откуда, при n четномъ,

$$\cos[n((\arcsin x))] = \cos(n \arcsin x) = f(x).$$

Равенство это позволяетъ рѣшить уравненіе:

$$f(x) = 0, \tag{4}$$

ибо оно говоритъ, что корни этого уравненія и уравненія:

$$\cos[n((\arcsin x))] = 0$$

одинаковы. Но послѣднее уравненіе даетъ:

$$n((\arcsin x)) = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \text{откуда} \quad ((\arcsin x)) = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n},$$

и, слѣдовательно,

$$x = \sin\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right], \tag{5}$$

гдѣ k произвольное цѣлое. Выраженіе (5) и представляетъ всѣ корни уравненія (5), но только въ тригонометрическомъ видѣ. Оно имѣетъ, какъ легко показать, n различныхъ значеній, которыя получимъ, давая буквѣ k значенія:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{n}{2} - 1 \quad \text{и} \quad -1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -\frac{n}{2}.$$

Примѣры.

$$\cos(4 \arcsin x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$
$$\cos(6 \arcsin x) = -32x^6 + 48x^4 - 18x^2 + 1.$$

Слѣдовательно, корни уравненія

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$$

суть значенія выраженія:

$$\sin\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}\right].$$

Давая буквѣ k значенія 0, 1, − 1, −2, найдемъ слѣдующіе корни:

$$\pm\sin\frac{\pi}{8},\qquad \pm\sin\frac{3\pi}{8}.$$

Замѣтимъ, что уравненіе рѣшается весьма просто алгебраически, причемъ корни его суть:

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{2}}.$$

Сопоставляя алгебраическія выраженія корней съ тригонометрическими, получимъ.

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sin 22^{0}30'=+\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\sin\frac{3\pi}{8}=\sin 67^{0}30'=+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

3⁰. *Функція* $\sin(n\arcsin x)$ *представляетъ, при n нечетномъ, цѣлую функцію степени n.*

Означимъ эту цѣлую функцію символомъ: $\Phi(x)$ и покажемъ что

$$\sin[n((\arcsin x))]=\Phi(x).$$

И въ самомъ дѣлѣ, имѣли (359):

$$((\arcsin x))=(-1)^{k}\arcsin x+k\pi,\quad n((\arcsin x))=(-1)^{k}n\arcsin x+nk\pi;$$

откуда, при n нечетномъ,

$$\sin[n((\arcsin x))]=\sin(n\arcsin x)=\Phi(x).$$

Равенство это позволяетъ рѣшить уравненіе:

$$\Phi(x)=0,\tag{6}$$

ибо оно говоритъ, что корни этого уравненія и уравненія:

$$\sin[n((\arcsin x))]=0,$$

одинаковы. Но послѣднее уравненіе дастъ (201, A):

$$n((\arcsin x))]=k\pi,\ \text{откуда}\ ((\arcsin x))=\frac{k\pi}{n},$$

и, слѣдовательно,

$$x=\sin\frac{k\pi}{n},\tag{7}$$

гдѣ k произвольное цѣлое. Выраженіе (7) и представляетъ всѣ корни уравненія (6), но только въ тригонометрическомъ видѣ. Оно имѣетъ, какъ легко показать, n различныхъ значеній, которыя получимъ, давая буквѣ k значенія

$$0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm\frac{n-1}{2}.$$

Примѣръ.

$$\sin(5\arcsin x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Слѣдовательно, корни уравненія

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$$

суть значенія выраженія:

$$\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Значенія эти суть:

$$\sin 0, \quad \pm\sin\frac{\pi}{2}, \quad \pm\sin\frac{2\pi}{5}.$$

4. *Функція* $\dfrac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ *представляетъ, при всякомъ n — четномъ и нечетномъ, цѣлую функцію степени* $(n-1)$.

Примѣры.

$$\frac{\sin(3\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = 4x^2 - 1, \quad \frac{\sin(4\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = 8x^3 - 4x.$$

Означивъ эту функцію символомъ: $f(x)$, покажемъ, что

$$\frac{\sin[n((\arccos x))]}{\sqrt{1-x^2}} = \pm f(x).$$

И въ самомъ дѣлѣ, имѣли (361):

$$((\arccos x)) = 2k\pi \pm \arccos x, \quad n((\arccos x)) = 2kn\pi \pm n\arccos x,$$

откуда

$$\frac{\sin[n((\arccos x))]}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pm\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \pm f(x),$$

что и хотѣли показать.

§ II. Теорема сложенія обратныхъ круговыхъ функцій.

366. Сумма: $\arcsin x + \arcsin y$.—Разсмотримъ сумму:

$$\arcsin x + \arcsin y. \tag{1}$$

Слагаемыя этой суммы удовлетворяютъ, по опредѣленію, слѣдующимъ условіямъ:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant +\frac{\pi}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin y \leqslant +\frac{\pi}{2}.$$

Сама сумма (1) удовлетворяетъ, слѣдовательно, одному изъ условій:

$$-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y \leq -\frac{\pi}{2}, \qquad (a)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y \leq +\frac{\pi}{2}, \qquad (b)$$

$$+\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y \leq +\pi. \qquad (c)$$

Извѣстно (234), что

$$\sin[\arcsin x + \arcsin y] = \sin(\arcsin x)\cos(\arcsin y) + \cos(\arcsin x)\sin(\arcsin y);$$

но (363):

$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2},$$
$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad \sin(\arcsin y) = y;$$

слѣдовательно,

$$\sin[\arcsin x + \arcsin y] = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$
$$= \sin[\arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})].$$

Соотвѣтственно неравенствамъ (*a*), (*b*) и (*c*) равенство это даетъ:

[42] $$\begin{cases} \arcsin x + \arcsin y = -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & (a) \\ \arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & (b) \\ \arcsin x + \arcsin y = +\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right). & (c) \end{cases}$$

Равенства эти выражаютъ такъ называемую **теорему сложенія функцій: $\arcsin x$ и $\arcsin y$.**

Особаго вниманія заслуживаетъ равенство (*b*) [1]). **Замѣтимъ,** что въ случаѣ (*b*) функція:

$$\cos(\arcsin x + \arcsin y) = \sqrt{1-x^2}\,.\sqrt{1-y^2} - xy$$

представляетъ **положительное** число.

[1]) Равенство (*b*) аналогично равенству: $\log x + \log y = \log(xy)$, относящемуся къ логариѳмамъ. Равенство это можетъ быть доказано такимъ образомъ: назовемъ основаніе логариѳмовъ буквою a; тогда:

$$a^{\log x + \log y} = a^{\log x}\,.\,a^{\log y} = x\,.\,y, \quad \text{откуда:} \quad \log x + \log y = \log(xy).$$

Примѣры.

1°. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\pi+\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$,

2°. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\quad+\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad=\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$,

3°. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad+\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad=\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$.

Измѣнивъ, въ формулахъ [**42**], y въ $(-y)$ и принявъ во вниманіе, что $\arcsin(-y)=-\arcsin y$, получимъ формулы для разности:

$$\arcsin x-\arcsin y, \tag{42'}$$

аналогичныя формуламъ [**42**].

367. Сумма: $\arcsin x+\arccos x$.—Покажемъ, что

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}. \tag{43}$$

И въ самомъ дѣлѣ:

1°. Если $x=0$, то формула [**43**] повѣряется непосредственно.
2°. Если $x\gtrless 0$, то

$$0<\arcsin x+\arccos x<\pi.$$

Имѣли (**234**).

$$\sin(\arcsin x+\arccos x)=\sin(\arcsin x)\cos(\arccos x)+\cos(\arcsin x)\sin(\arccos x)$$
$$=x^2+\sqrt{(1-x^2)(1-x^2)}=1.$$

Принимая во вниманіе, что дуга: $(\arcsin x+\arccos x)$ заключена между 0 и π и что единственная дуга, заключенная въ этихъ границахъ, синусъ которой равенъ 1, есть $\frac{\pi}{2}$, находимъ, что

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

А это и требовалось доказать.

368. Сумма: $\arccos x+\arccos y$.—Принимая во вниманіе, что

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x,\qquad \arccos y=\frac{\pi}{2}-\arcsin y,$$

получаемъ:

$$\arccos x+\arccos y=\pi-(\arcsin x+\arcsin y). \tag{44}$$

369. Разность: arccos$x$ — arccos$y$.—Принимая во вниманіе, что

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \qquad \arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y,$$

получаемъ:

[45] $$\arccos x - \arccos y = -(\arcsin x - \arcsin y).$$

370. Сумма: arctg$x$ + arctg$y$.—Разсмотримъ сумму:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y.$$

Слагаемыя этой суммы удовлетворяють, по опредѣленію, слѣдующимъ условіямъ:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant +\frac{\pi}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arctg} y \leqslant +\frac{\pi}{2}.$$

Сама сумма удовлетворнетъ, слѣдовательно, одному изъ условій:

$$-\pi \leqslant \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \leqslant -\frac{\pi}{2}, \qquad (h)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \leqslant +\frac{\pi}{2}, \qquad (i)$$

$$+\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \leqslant +\pi. \qquad (k)$$

Извѣстно (**236**), чт

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} =$$
$$= \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}\right].$$

Соотвѣтственно неравенствамъ (h), (i) и (k) равенство это даетъ:

[46] $$\begin{cases} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}, & (h) \\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}, & (i) \\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}. & (k) \end{cases}$$

Равенства эти выражаютъ такъ называемую **теорему сложенія функцій: arctg$x$ и arctg$y$.**

Примѣры.

$$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\operatorname{arctg}(-1)=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=-\pi+\operatorname{arctg}\left(2+\sqrt{3}\right),$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\operatorname{arctg}(1)=\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\left(2+\sqrt{3}\right),$$

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right)+\operatorname{arctg}1=\pi+\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\pi+\operatorname{arctg}\left(-2-\sqrt{3}\right).$$

Измѣнивъ въ формулахъ [46] y въ $(-y)$ и принявъ во вниманіе, что $\operatorname{arctg}(-y)=-\operatorname{arctg}y$, получимъ формулы для разности:

$$\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y \qquad [46']$$

371. Упражненія.

1. Показать, что $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.
2. Найти значеніе для $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)$.
3. Показать, что $\arcsin\frac{77}{85}=\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}$.
4. Найти значеніе для $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arccotg}x)$.
5. Показать, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.
6. Показать, что $\operatorname{arctg}a=\operatorname{arctg}\frac{a-b}{1+ab}+\operatorname{arctg}\frac{b-c}{1+bc}+\operatorname{arctg}c$.
7. Показать, что $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.
8. Найти значеніе для $\operatorname{tg}\left(3\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{26}-\frac{\pi}{4}\right)$.
9. Показать, что $\operatorname{arctg}\left[(\sqrt{2}+1)\operatorname{tg}\alpha\right]-\operatorname{arctg}\left[(\sqrt{2}-1)\operatorname{tg}\alpha\right]=\operatorname{arctg}(\sin 2\alpha)$.
10. Если $\operatorname{tg}(\theta-\alpha)\operatorname{tg}(\theta-\beta)=\operatorname{tg}^2\theta$, то $\theta=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
11. Показать, что $\arccos\frac{9}{\sqrt{82}}+\operatorname{arccosec}\frac{\sqrt{41}}{4}=\frac{\pi}{4}$
12. Показать, что $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$
13. Показать, что $3\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{20}=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{1985}$.
14. Показать, что $\operatorname{arctg}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$.
15. Показать, что $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}a)=2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a+\operatorname{arctg}a^3)$.
16. Показать, что $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}2A\right)+\operatorname{arctg}(\operatorname{cotg}A)+\operatorname{arctg}(\operatorname{cotg}^3A)=0$.
17. Показать, что $\frac{2b}{a}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)$.

18. Показать, что

$$\frac{a^3}{2}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}\right)+\frac{b^3}{2}\sec^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)=(a+b)(a^2+b^2).$$

Рѣшить слѣдующія уравненія:

19. $\arcsin x+\arcsin\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}$. Отв. $x^2=\frac{2}{17}(5-2\sqrt{2})$.

20. $\arcsin\frac{2a}{1+a^2}+\arcsin\frac{2b}{1+b^2}=\operatorname{arctg}x$. Отв. $x=\frac{a+b}{1-ab}$.

21. $\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}(x+1)=\operatorname{arctg}3x$. Отв. $x=0,\ \pm\frac{1}{2}$.

22. $\arcsin 2x-\arcsin x\sqrt{3}=\arcsin x$. Отв. $x=0,\ \pm\frac{1}{2}$.

23. $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}$. Отв. $x=-\frac{461}{9}$.

24. $\sin 2\arccos[\operatorname{cotg}2\operatorname{arctg}x]=0$. Отв. $x=\pm1,\ \pm(1\pm\sqrt{2})$.

25 $\operatorname{arctg}\frac{1}{a-1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}\frac{1}{a^2-x+1}$. Отв. $x=a,\ a^2-a+1$.

26. $3\operatorname{arctg}\frac{1}{2+\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Отв. $x=2$.

372. Непрерывность обратныхъ круговыхъ функцій.—Если h есть достаточно малое, по модулю, число, то числа: $(x+h)$ и x совмѣстно положительныя и совмѣстно отрицательныя, а потому:

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin(x+h)-\arcsin x\leqslant+\frac{\pi}{2}\ ^{1)},$$
$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\operatorname{arc\,tg}(x+h)-\operatorname{arc\,tang}x\leqslant+\frac{\pi}{2}\ ^{2)}.$$

На основаніи сихъ неравенствъ и принимая во вниманіе формулы: [42'], [45] и [46'], получимъ:

$$\arcsin(x+h)-\arcsin x=\arcsin\left[(x+h)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+h)^2}\right],$$
$$\operatorname{arc\,tg}(x+h)-\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{h}{1+(x+h)x}\right],$$
$$\arccos(x+h)-\arccos x=-\arcsin\left[(x+h)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+h)^2}\right].$$

Равенства эти, очевидно, справедливы и при $x=0$.

---

1) И въ самомъ дѣлѣ, если $x<0$, то $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin(x+h)\leqslant0$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant0$, и, слѣдовательно, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin(x+h)-\arcsin x\leqslant+\frac{\pi}{2}$; если $x>0$, то $0\leqslant\arcsin(x+h)\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$, и, слѣдовательно опять, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin(x+h)-\arcsin x\leqslant+\frac{\pi}{2}$; если $x=0$, то $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin h\leqslant+\frac{\pi}{2}$.

2) То же разсужденіе.

Если тригонометрическая дуга заключена между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ и если ея синусъ или ея тангенсъ стремятся къ нулю, то и дуга стремится къ нулю.

Но, при стремленіи h къ нулю, выраженія:

$$(x+h)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+h)^2} \quad \text{и} \quad \frac{h}{1+(x+h)x},$$

входящія въ правыя части вышенаписанныхъ равенствъ и представляющія, соотвѣтственно, синусъ и тангенсъ, стремятся къ нулю. Слѣдовательно, правыя части равенствъ, а вмѣстѣ съ ними и лѣвыя, стремятся къ нулю вмѣстѣ съ h.

Итакъ,

$$\lim\,[\arcsin(x+h)-\arcsin x]_{h=0}=0,$$
$$\lim\,[\text{arc tg}(x+h)-\text{arc tg}\,x]_{h=0}=0,$$
$$\lim\,[\arccos(x+h)-\arccos x]_{h=0}=0.$$

Равенства эти говорятъ, что функціи $\arcsin x$, $\text{arctg}\,x$ и $\arccos x$ суть функціи непрерывныя при всякомъ x (181).

§ III. Производныя обратныхъ круговыхъ функцій.

373. Лемма.—1°. Имѣли (231):

$$\lim\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)_{\alpha=0}=1.$$

Положивъ $\sin\alpha=\beta$ и, слѣдовательно, $\alpha=\arcsin\beta$, можемъ написать предыдущее равенство въ видѣ:

$$\lim\left[\frac{\beta}{\arcsin\beta}\right]_{\beta=0}=1, \quad \text{или, наоборотъ,} \quad \lim\left[\frac{\arcsin\beta}{\beta}\right]_{\beta=0}=1. \qquad (1)$$

2°. Принимая во вниманіе, что $\frac{\text{tang}\,\alpha}{\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$, заключаемъ, что

$$\lim\left(\frac{\text{tg}\,\alpha}{\alpha}\right)_{\alpha=0}=1, \quad \text{или} \quad \lim\left(\frac{\text{arctang}\,\gamma}{\gamma}\right)_{\gamma=0}=1,$$

гдѣ $\gamma=\text{tg}\,\alpha$.

374. Производная арксинуса. — Производная $\arcsin x$ есть $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. И въ самомъ дѣлѣ, приращеніе функціи $\arcsin x$, выражаемое разностью

$$\arcsin(x+h)-\arcsin x,$$

представляется въ такомъ видѣ (370):

$$\arcsin\left[(x+h)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+h)^2}\right]$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\arcsin(x+h)-\arcsin x}{h}=\frac{\arcsin\left[(x+h)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+h)^2}\right]}{h}.$$

Для нахожденія предѣла, къ которому стремится это отношеніе, когда h стремится къ нулю, представимъ его въ видѣ:

$$\frac{\arcsin\left[(x+h)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+h)^2}\right]}{(x+h)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+h)^2}}\cdot\frac{(x+h)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+h)^2}}{h}.$$

Но первый сомножитель стремится, на основаніи леммы, къ 1, ибо знаменатель стремится къ нулю.

Для нахожденія предѣла, къ которому стремится 2-й сомножитель, представимъ его въ видѣ:

$$\frac{(x+h)^2(1-x^2)-x^2(1-(x+h)^2)}{h\left[(x+h)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+h)^2}\right]}=\frac{2x+h}{(x+h)\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1-(x+h)^2}}$$

Видимъ, что, при стремленіи h къ нулю, сомножитель этотъ стремится къ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Итакъ,

[47] $$\lim\left[\frac{\arcsin(x+h)-\arcsin x}{h}\right]_{h=0}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

что и требовалось доказать.

376 **Производная арктангенса.**—Производная арктангенса равна $\frac{1}{1+x^2}$. И въ самомъ дѣлѣ, приращеніе функціи $\operatorname{arctg} x$, выражаемое разностью:

$$\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x,$$

представляется въ такомъ видѣ (370):

$$\operatorname{arctg}\left[\frac{h}{1+(x+h)x}\right].$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} h}{h}=\frac{\operatorname{arctg}\left[\frac{h}{1+(x+h)x}\right]}{h}.$$

Для нахожденія предѣла, къ которому стремится это отношеніе, когда h стремится къ нулю, представимъ его въ такомъ видѣ:

$$\frac{\operatorname{arctg}\left[\frac{h}{1+(x+h)x}\right]}{\frac{h}{1+(x+h)x}}\cdot\frac{\frac{h}{1+(x+h)x}}{h}.$$

Но первый сомножитель стремится, на основаніи леммы, къ 1, ибо знаменатель стремится къ нулю, второй же сомножитель, равный $\frac{1}{1+(x+h)x}$, стремится къ $\frac{1}{1+x^2}$. Итакъ,

$$\lim\left[\frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}\right]_{h=0}=\frac{1}{1+x^2},\qquad [48]$$

что и требовалось доказать.

376. Производная арккосинуса.—Производная арккосинуса равна $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т.-е отличается знакомъ отъ производной арксинуса, ибо (369)

$$\arcsin(x+h)-\arcsin x=-[\arccos(x+h)-\arccos x].$$

377. Замѣчанія.—1°. Производныя обратныхъ круговыхъ функцій суть функціи алгебраическія.

2°. Производныя функцій: $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg}x$, при всякомъ значеніи аргумента, *положительныя*, и, вмѣстѣ съ симъ, сами функціи: $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg}x$ суть функціи *возрастающія*.

3°. Производная функціи $\arccos x$, при всякомъ значеніи x, *отрицательная*, и, вмѣстѣ съ симъ, сама функція есть функція *убывающая*.

ГЛАВА VIII.

Приближенныя значенія тригонометрическихъ элементовъ. Построеніе таблицъ.

---

§ I. Приближенныя значенія тригонометрическихъ элементовъ.

378. Теорема.—*Синусъ тригонометрической дуги x, положительной и меньшей квадранта, болѣе разности между этою дугою и четвертью ея куба.*

Имѣли (281):

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2},$$

или

$$\sin x=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right).\qquad (1)$$

Такъ какъ тригонометрическая дуга x, по условію, положительная и меньшая квадранта, то (229)

$$\operatorname{tang}\frac{x}{2} > \frac{x}{2} \quad \text{и} \quad \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}. \qquad (2)$$

На основаніи послѣдняго неравенства можемъ написать:

$$1 - \sin^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{x^2}{4}. \qquad (3)$$

Такъ какъ всѣ части неравенствъ (2) и (3) суть положительныя числа, то можемъ перемножить по частямъ равенство (1) и эти неравенства. Сдѣлавъ это перемноженіе и раздѣливъ засимъ обѣ части полученнаго неравенства на положительное число:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right),$$

получимъ:

[49] $$\sin x > x - \frac{x^3}{4},$$

что и требовалось доказать.

379. Слѣдствіе.—Изъ неравенствъ:

$$x > \sin x > x - \frac{x^3}{4}$$

находимъ:

$$0 < x - \sin x < \frac{x^3}{4}.$$

Неравенства эти говорятъ, что *положительная тригонометрическая дуга, меньшая квадранта, представляетъ* **приближенное** *значеніе синуса этой дуги, съ избыткомъ,* **съ ошибкою,** *меньшею* **четверти** *куба этой дуги.*

380. Замѣчаніе.—Можно показать, что *эта ошибка даже меньше* **шестой** *куба дуги.* Для сего достаточно показать, что

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}.$$

Имѣли (282):

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Измѣняя въ этомъ равенствѣ x, послѣдовательно, въ

$$\frac{x}{3}, \quad \frac{x}{3^2}, \quad \frac{x}{3^3}, \quad \ldots, \quad \frac{x}{3^n},$$

получимъ.

$$\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3},$$
$$\sin\frac{x}{3} = 3\sin\frac{x}{3^2} - 4\sin^3\frac{x}{3^2},$$
$$\sin\frac{x}{3^2} = 3\sin\frac{x}{3^3} - 4\sin^3\frac{x}{3^3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin\frac{x}{3^{n-1}} = 3\sin\frac{x}{3^n} - 4\sin^3\frac{x}{3^n}.$$

Умноживъ эти равенства, соотвѣтственно, на

$$1,\quad 3,\quad 3^2,\quad \ldots,\quad 3^{n-1},$$

сложивъ ихъ, послѣ умноженія, по частямъ и сдѣлавъ нѣкоторыя очевидныя сокращенія, получимъ:

$$\sin x = 3^n\sin\frac{x}{3^n} - 4\left[\sin^3\frac{x}{3} + 3\sin^3\frac{x}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{x}{3^3} + \ldots + 3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n}\right].$$

Замѣнивъ, въ скобкахъ, каждый изъ синусовъ соотвѣтствующею тригонометрическою дугою, увеличимъ число, помѣщенное въ скобкахъ, и, слѣдовательно, уменьшимъ правую часть. Итакъ,

$$\sin x \geqslant 3^n\sin\frac{x}{3^n} - 4\left[\frac{x^3}{3^3} + \frac{x^3}{3^5} + \frac{x^3}{3^7} + \ldots + \frac{x^3}{3^{2n+1}}\right],$$

или

$$\sin x \geqslant \frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}\cdot x - 4\,\frac{x^3}{3^3}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^{2n-2}}\right]. \qquad (h)$$

Неравенство это имѣетъ мѣсто при всякомъ натуральномъ n; оно имѣетъ, слѣдовательно, мѣсто и въ предѣлѣ, когда n безгранично возрастаетъ. Но, при безграничномъ возрастаніи n, дуга $\frac{x}{3^n}$ безгранично убываетъ; слѣдовательно (231),

$$\lim\left[\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}\right]_{n=\infty} = 1.$$

Далѣе: количество, помѣщенное въ скобкахъ, представляетъ сумму послѣдовательныхъ членовъ убывающей прогрессіи, знаменатель которой равенъ $\frac{1}{9}$. Изъ алгебры извѣстно [1]), что сумма эта, при безграничномъ возрастаніи n, стремится къ предѣлу, равному частному отъ раздѣленія перваго

---

[1]) См. *Н. Билибинъ*. Алгебра. 4-е изд. Стр. 334

слагаемаго на разность между 1 и знаменателемъ прогрессіи, т.-е. имѣетъ предѣлъ, равный числу:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}.$$

Итакъ, неравенство (h) обратится, въ предѣлѣ, въ такое:

$$\sin x > x - 4\cdot\frac{x^3}{27}\cdot\frac{9}{8},\quad \text{или}\quad \sin x > x-\frac{x^3}{6},$$

что и требовалось доказать.

381. Теорема. — *Если x есть тригонометрическая положительная дуга, меньшая квадранта, то*

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}.$$

Имѣли (**281**):

$$\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Замѣнивъ, въ правой части, $\sin\frac{x}{2}$ большимъ числомъ: $\frac{x}{2}$, получимъ:

$$\cos x > 1-\frac{x^2}{2}. \qquad (1)$$

Замѣнивъ же, въ правой части, $\sin\frac{x}{2}$ меньшимъ числомъ: $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^3$, найдемъ:

$$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}-\frac{x^6}{16\,.\,32}.$$

Отбросивъ въ правой части послѣдній членъ, усилимъ неравенство и получимъ:

$$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}. \qquad (2)$$

Неравенства (1) и (2) доказываютъ предложеніе.

382. Замѣчаніе.—Если возьмемъ болѣе приближенное неравенство:

$$\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48},$$

$$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{2x^6}{(48)^2},$$

а потому, *подавно*,

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}. \qquad (3)$$

Это соотношенiе приближеннѣе соотношенiя (2).

Можно, слѣдовательно, сказать, что, при тригонометрической дугѣ x, заключенной между 0 и $\frac{\pi}{2}$, имѣемъ:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

383. Слѣдствiе. — Предыдущая теорема даетъ:

$$0 < \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < \frac{x^4}{16}.$$

Неравенства эти говорятъ, что *если x есть положительная тригонометрическая дуга, меньшая квадранта, то* $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ *представляетъ* приближенное *значенiе* $\cos x$, *съ недостаткомъ,* съ ошибкою, *меньшею* $\frac{x^4}{16}$.

Исходя изъ формулы (3), найдемъ:

$$0 < \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < \frac{x^4}{24}.$$

384. Приближенное вычисленiе $\cos 10''$ и $\sin 10''$. — Означимъ тригонометрическую дугу, соотвѣтствующую дугѣ въ $10''$, символомъ: $\operatorname{arc} 10''$.

Имѣемъ:

$$\operatorname{arc} 10'' = \frac{2\pi \cdot 10}{180.60.60} = 0{,}0000484813681\ldots;$$

слѣдовательно,

$$\operatorname{arc} 10'' < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}.$$

Отсюда заключаемъ, на основанiи (**379**), что ошибка, которую получимъ, взявъ, вмѣсто $\sin 10''$, $\operatorname{arc} 10''$, будетъ менѣе числа:

$$\frac{(\operatorname{arc} 10'')^3}{4} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10^{12}} < \frac{1}{10^{13}}.$$

Можно, слѣдовательно, утверждать, что, взявъ тринадцать первыхъ десятичныхъ знаковъ въ числѣ, представляющемъ $\operatorname{arc} 10''$, будемъ имѣть приближенное значенiе, *съ избыткомъ,* синуса съ точностью до единицы, соотвѣтствующей послѣдней цифрѣ.

Имѣемъ, слѣдовательно, *съ недостаткомъ*,

$$\sin 10'' = 0{,}0000484813680.$$

Далѣе, число:

$$1 - \frac{1}{2}(\operatorname{arc} 10'')^2 \qquad (a)$$

есть приближенное значеніе, съ недостаткомъ, $\cos 10''$, и ошибка менѣе числа:

$$\frac{1}{16}(\operatorname{arc} 10'')^4 < \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16 \cdot 10^{16}} < \frac{1}{10^{18}}.$$

Первые 18 десятичныхъ знаковъ числа (a) суть первые 18 знаковъ $\cos 10''$. Выполняя вычисленіе, получимъ:

$$\cos 10'' = 0{,}999999998824778473$$

съ 18 точными десятичными знаками.

§ II. Построеніе таблицы.

385. Формулы Симпсона. — Формулы Симпсона суть формулы, позволяющія послѣдовательно вычислять синусы и косинусы дугъ: $20''$, $30''$, . . ., по даннымъ синусу и косинусу дуги въ $10''$.

Разсмотримъ формулы (**239**):

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b,$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b.$$

Сдѣлавъ въ этихъ формулахъ:

$$b = 10'', \qquad a = 10'' \cdot m,$$

получимъ:

$$(1) \quad \begin{cases} \sin[10''.(m+1)] + \sin[10''.(m-1)] = 2\sin(10''.m).\cos 10''; \\ \cos[10''.(m+1)] + \cos[10''.(m-1)] = 2\cos(10''.m).\cos 10''. \end{cases}$$

Замѣтивъ, что число $2\cos 10''$ очень близко къ 2, положимъ:

$$2\cos 10'' = 2 - k,$$

гдѣ k очень малое число.

Принимая во вниманіе, что число $1-\frac{1}{2}(\text{arc}\,10'')^2$ взято за приближенное значеніе $\cos 10''$, получимъ:

$$2-k=2-(\text{arc}\,10'')^2,$$

и, слѣдовательно,

$$k=(\text{arc}\,10'')^2=0{,}00000000235044305З \text{ (съ недостаткомъ).}$$

Замѣнивъ, въ формулахъ (1), $2\cos 10''$ числомъ $2-k$, найдемъ:

$$\sin[10''.(m+1)]+\sin[10''.(m-1)]=2\sin(10''.m)-k\sin(10''.m),$$
$$\cos[10''.(m+1)]+\cos[10''.(m-1)]=2\cos(10''.m)-k\cos(10''.m).$$

Изъ этихъ формулъ выводимъ, наконецъ, слѣдующія:

$$\begin{cases}\sin[10''.(m+1)]-\sin(10''.m)=\sin(10''.m)-\sin[10''.(m-1)]-k\sin(10''.m),\\ \cos[10''.(m+1)]-\cos(10''.m)=\cos(10''.m)-\cos[10''.(m-1)]-k\cos(10''.m).\end{cases}$$

Формулы эти и извѣстны подъ именемъ *формулъ Симпсона.*

Сдѣлавъ въ нихъ $m=1$, получимъ формулы:

$$\sin 20''-\sin 10''=\sin 10''-k\sin 10'',$$
$$\cos 20''-\cos 10''=\cos 10''-k\cos 10''-1,$$

вычисляющія $\sin 20''$ и $\cos 20''$ по вычисленнымъ выше $\sin 10''$ и $\cos 10''$.

Сдѣлавъ $m=2$, получимъ:

$$\begin{cases}\sin 30''-\sin 20''=(\sin 20''-\sin 10'')-k\sin 20'',\\ \cos 30''-\cos 20''=(\cos 20''-\cos 10'')-k\cos 20''.\end{cases}$$

Формулы эти даютъ $\sin 30''$ и $\cos 30''$ и, кромѣ сего, вычисляютъ разности: $(\sin 30''-\sin 20'')$ и $(\cos 30''-\cos 20'')$ по вычисленнымъ уже разностямъ: $(\sin 20''-\sin 10'')$ и $(\cos 20''-\cos 10'')$.

И вообще, формулы Симпсона даютъ разности синусовъ и косинусовъ двухъ послѣдовательныхъ дугъ по вычисленнымъ предъидущимъ разностямъ. Вычисленіе каждой новой разности требуетъ только *одного* умноженія на множителя k.

386. Упрощенія. — **1°**. Знаемъ, что достаточно вычислить синусы и косинусы дугъ отъ 0° до 45°, чтобы имѣть синусы и косинусы дугъ отъ 0° до 90°.

2°. Для вычисленія синусовъ и косинусовъ дугъ отъ 30° до 45° можно получить формулы, болѣе удобныя, чѣмъ формулы Симпсона.

И въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\sin(a+b) = -\sin(a-b) + 2\sin a\cos b,$$
$$\cos(a+b) = \quad \cos(a-b) - 2\sin a\sin b.$$

Сдѣлавъ въ этихъ формулахъ: $a = 30^0$, $b = A$ и замѣтивъ, что $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, получимъ:

$$\sin(30^0 + A) = -\sin(30^0 - A) + \cos A,$$
$$\cos(30^0 + A) = \quad \cos(30^0 - A) - \sin A.$$

Соотношенія эти даютъ, *при помощи простыхъ вычитаній*, синусы и косинусы дугъ, большихъ 30^0, если извѣстны синусы и косинусы дугъ, меньшихъ 30^0.

387. Повѣрки.—При употребленіи формулъ Симпсона ошибки наростаютъ, и если приложить эти формулы, безъ перерыва, къ дугамъ отъ 0^0 до 30^0, то послѣднія вычисленныя значенія значительно менѣе приближенны, чѣмъ первыя. На основаніи сего хорошо повѣрять вычисленія и сглаживать ошибки, вычисляя, по временамъ, синусы и косинусы нѣкоторыхъ дугъ непосредственно. Можно непосредственно вычислить синусы и косинусы дугъ черезъ 9^0.

Это сдѣлать легко. И въ самомъ дѣлѣ, $\sin 18^0$ есть отношеніе къ радіусу половины хорды, стягивающей дугу въ 36^0, т.-е. половины стороны правильнаго десятиугольника, равной $r\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Слѣдовательно,

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

а потому:

$$\sin 9^0 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\sqrt{5}+3} - \sqrt{5-\sqrt{5}}\right],$$
$$\cos 9^0 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\sqrt{5}+3} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right].$$

Формулы сложенія дадутъ: $\cos 27^0$ и $\sin 27^0$, и т. д.

Раздѣляя дуги на 2, одинъ или нѣсколько разъ, можно прямо вычислять синусы и косинусы болѣе сближающихся дугъ.

Зная синусы и косинусы дугъ:

$$45^0,\quad 30^0,\quad 18^0,\quad 9^0,$$

получимъ, на основаніи формулъ сложенія, *простыми извлеченіями квадратныхъ корней,* синусы и косинусы дугъ:

$$15^0 = 45^0 - 30^0, \qquad 21^0 = 30^0 - 9^0,$$
$$12^0 = 30^0 - 18^0, \qquad 24^0 = 30^0 - 6^0,$$
$$6^0 = 18^0 - 12^0, \qquad 27^0 = 45^0 - 18^0,$$
$$3^0 = 18^0 - 15^0.$$

Такъ, напримѣръ,

$$\cos 15^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin 15^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

388. Замѣчаніе.—Изложенною методою пользовались ученые, которымъ обязаны первымъ построеніемъ таблицъ синусовъ и косинусовъ. Въ настоящее время анализъ обладаетъ способами, несравненно болѣе быстрыми и удобными. Способы эти основаны на формулахъ, выражающихъ синусы и косинусы въ функціи дуги.

Формулы эти суть:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

гдѣ x есть тригонометрическая дуга.

Выводъ этихъ формулъ принадлежитъ Высшей Математикѣ.